TYCHONOFF THEOREM

Theorem 1. *Se* (X_i, τ_i) *sono spazi compatti allora* $\prod_{i \in I} X_i$ *con la topologia prodotto* τ *è compatto.*

Proof. Per $A \subset X_i$ sia
$$N(A, i) = \{f \in \prod_{i \in I} X_i : f(i) \in A\}.$$
Osserviamo che la topologia τ è generata dagli aperti di base della forma
$$\bigcap_{j \leq k} N(A_{i_j})$$
con $i_j \in I$ ed $A_{i_j} \in \tau_{i_j}$ per ogni $j = 1, \ldots, k$.

In particolare una sottobase per τ è data da aperti della forma $N(A)$ al variare di $i \in I$ ed $A \in \tau_i$ aperto di X_i. Notiamo che i chiusi che sono complementi di aperti di base sono della forma
$$F(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}) = \{f \in \prod_{i \in I} X_i : \exists j \leq k : f(i) \in C_{i_j}\} = \bigcup_{j \leq k} N(C_{i_j})$$
con i C_{i_j} chiusi di X_{i_j} per ogni $j = 1, \ldots, k$.

Questo vuol dire che ogni chiuso è l'intersezione di una famiglia di chiusi della forma
$$F(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k})$$
per opportuni $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$ chiusi nei rispettivi X_{i_j} per $j \leq k$.

In particolare sia $\{F_j : j \in J\}$ un famiglia di chiusi. Troviamo per ogni $j \in J$ una famiglia
$$\{F(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}) : \{i_1, \ldots, i_k\} \in K(F_j) \subset J^{<\omega}\}$$
tale che per ogni $\{i_1, \ldots, i_k\} \in K(F_j)$, C_{i_k} un chiuso di X_{i_k} e
$$F_j = \bigcap \{F(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}) : \{i_1, \ldots, i_k\} \in K(F_j) \subset J^{<\omega}\}.$$
Questo ci dice che la famiglia
$$\mathcal{F} = \{F(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}) : \{i_1, \ldots, i_k\} \in \bigcup_{j \in J} K(F_j)\} \subset P(\prod_{i \in I} X_i)$$
ha la proprietà dell'intersezione finita se $\{F_j : j \in J\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita e anche che
$$\bigcap_{j \in J} F_j = \bigcap \mathcal{F}.$$

In particolare possimo limitarci a dimostrare il teorema per famiglie di chiusi con la f.i.p i cui elementi sono tutti della forma $F(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k})$.

Ora data una tale famiglia $\mathcal{F}$, sia $G \supset P(\prod_{i\in I} X_i)$ un ultrafiltro che estende $\mathcal{F}$. Osserviamo ora che se $F(C_{i_1},\dots,C_{i_k}) \in G$ (dato che:

$$F(C_{i_1},\dots,C_{i_k}) = \bigcup_{j\leq k} F(C_{i_j}))$$

si ha che $F(C_{i_j}) \in G$ per almeno un $j \leq k$ (Questo usa il Lemma 1 che trovate al fondo di questa nota).

Ora osserviamo che

$$\bigcap \mathcal{F} \supseteq \bigcap \{F(C_{i_1},\dots,C_{i_k}) : F(C_{i_1},\dots,C_{i_k}) \in G\} = \bigcap \{F(C) : F(C) \in G\}$$

poiché per ogni $F(C_{i_1},\dots,C_{i_k}) \in G$ esiste un $j \leq k$ tale che $F(C_{i_1},\dots,C_{i_k}) \supseteq F(C_{i_j}) \in G$.

Quindi basta dimostrare:

$$\bigcap \{F(C) : F(C) \in G\} \neq \emptyset.$$

Ora la dimostrazione è semplice: sia per ogni $i \in I$

$$C_i = \bigcap \{C : C \text{ chiuso di } X_i \text{ e } F(C) \in G\}.$$

Si verifica facilmente che la famiglia di chiusi C di (X_i, τ_i) tali che $F(C) \in G$ ha la proprietà dell'intersezione finita. Per compattezza di τ_i, sia $x_i \in C_i$ per ogni $i \in I$.

Poniamo $f(i) = x_i$ per ogni $i \in I$. Dimostriamo che $f \in \bigcap\{F(C) : F(C) \in G\}$.

Assumiamo che questo non sia il caso. Allora esiste $i \in I$ e C chiuso di X_i tale che $f \notin F(C) \in G$, i.e. $f(i) \notin C$. Questo contraddice l'assunto che

$$f(i) = x_i \in C_i \subset C.$$

□

Dimostriamo ora il lemma enunciato in precedenza:

Lemma 1. *Se $G \subset P(X)$ è un ultrafiltro e $X_1 \cup \cdots \cup X_n \in G$ allora almeno uno degli X_i è in G.*

Proof. Se nessun $X_n \in G$ allora $X \setminus X_i \in G$ per ogni $i \leq n$ e quindi

$$X \setminus \bigcup_{i\leq n} X_i = \bigcap_{i\leq n} (X \setminus X_i) \in G,$$

da cui otteniamo

$$\emptyset = (X \setminus \bigcup_{i\leq n} X_i) \cap (\bigcup_{i\leq n} X_i) \in G.$$

Contraddizione. □