Corso di Laurea in Matematica - Geometria 1 – Corso B - A.A. 2011-12

Foglio di esercizi n. 6, da consegnare giovedì 19/4

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Esercizio 1

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, è

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1+a^2 & 1+a \\ 8 & 4 & 3+a^2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Per quali valori di a l'endomorfismo f è iniettivo?
2. Per i restanti valori di a determinare la dimensione e una base di $\ker f$.
3. Posto $a = -1$, trovare le controimmagini del vettore $(1, 2, 0)$.

Posto $a = 1$:

4. dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga una base di $\ker f$.
5. $\ker f$ e $\operatorname{im} f$ sono in somma diretta?
6. Per quali valori di $h, k, l \in \mathbb{R}$ il vettore (h, k, l) ammette controimmagini?
7. Esiste un endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$ tale che $\ker g = \operatorname{im} f$ e $\operatorname{im} g = \ker f$?

Esercizio 2

Sia $A(\mathbb{R}^{3,3})$ lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche di ordine 3, e si considerino le matrici in $A(\mathbb{R}^{3,3})$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Verificare che B e C sono linearmente indipendenti, e completare $\{B, C\}$ a una base $\mathcal{B}$ di $A(\mathbb{R}^{3,3})$.

b. Determinare le componenti della matrice:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 3

Nello spazio vettoriale reale V_3 dei vettori ordinari, riferito ad una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (i, j, k)$, sono dati i vettori $a = (1, 0, -1)$ e $b = (2, 1, 2)$.

1. Determinare i vettori x che verificano le seguenti condizioni:
    - l'area del parallelogramma individuato da a e da x è 6;
    - $\mathcal{B}' = (a, b, x)$ è una base ortogonale positiva.
2. Scrivere la matrice del cambiamento di base in V_3 da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.
3. Calcolare le componenti del vettore $c = (4, -1, 3)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

Esercizio 4

Sia $D\colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}$ un'applicazione con le proprietà:

- $D\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = 0$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$;
- $D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$;
- per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ le applicazioni:

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\qquad \phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} \\ \text{e } \psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\qquad \psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} x & a \\ y & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  sono lineari.

a) Mostrare che $D\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$.

b) Mostrare che $D(A) = \det(A)$ per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{2,2}$.

Esercizio 5

In $\mathbb{R}^3$ si consideri il vettore $a = (1, -1, 2)$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione che ad ogni vettore x di $\mathbb{R}^3$ associa il vettore proiezione ortogonale di x su a.

a. Mostrare che f è un'applicazione lineare.

b. Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.

c. Determinare la dimensione e una base sia di $\ker f$ che di $\operatorname{im} f$.

d. Determinare la dimensione e una base di $f(W)$ e di $f^{-1}(W)$, dove $W = \mathcal{L}(a, b)$ con $b = (0, 3, 4)$.