Corso di Laurea in Matematica - Geometria 1 – Corso B - A.A. 2011-12

Foglio di esercizi n. 9, da consegnare giovedì 11/5

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Esercizio 1

Sia V lo spazio vettoriale reale delle funzioni continue dall'intervallo $[0,1]$ in $\mathbb{R}$, con il prodotto scalare

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Sia $W := \mathcal{L}(x, x^2)$. Determinare una base ortonormale di W.

Esercizio 2

Sia r una retta passante per l'origine in $\mathbb{R}^2$, di equazione

$$ax + by = 0,$$

e supponiamo che $a^2 + b^2 = 1$.

1) Scrivere l'equazione della riflessione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto a r.

2) Mostrare che f è lineare e scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica.

3) Mostrare che f è un'isometria di determinante -1.

Esercizio 3

Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, e $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base ortonormale. Sia inoltre $u := e_2 + e_3$, e consideriamo l'applicazione $f\colon V \to V$ data da

$$f(x) = x - 2(x \cdot u)u.$$

1) Verificare che f è un endomorfismo di V.

2) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

3) Determinare la dimensione e una base sia di $\ker f$ che di $\operatorname{im} f$.

4) Calcolare gli autovalori e gli autospazi di f, e dire se f è diagonalizzabile.

5) Sia $H := \mathcal{L}(u)^{\perp}$. Calcolare la dimensione e una base sia di $f(H)$ che di $f^{-1}(H)$.

Esercizio 4

Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare data da tale:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4, 2x_3 + hx_4, x_3 + kx_4, 0),$$

dove h e k sono parametri reali.

a) Stabilire per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ f è diagonalizzabile;

b) trovare, quando è possibile, una base di autovettori.

Esercizio 5

1) In $\mathbb{R}^5$ i sottospazi vettoriali:

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 = x_3 = 0\},$$

$$W_2 = \mathcal{L}((1,2,1,2,1), (0,1,1,1,1), (1,0,-1,0,-1), (2,3,1,3,1)),$$

sono supplementari?

2) Rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^5$, determinare le equazioni del complemento ortogonale di W_1, la dimensione e una sua base ortonormale.