

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_

**Esercizio 1**

Nello spazio ordinario rispetto al riferimento cartesiano  $\mathcal{R} = (O, i, j, k)$ , si consideri la circonferenza  $C$  di equazioni:

$$C: \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

1. Determinare il centro e il raggio di  $C$ .
2. Determinare la retta tangente alla circonferenza  $C$  nel punto  $A = (1, 1, 1)$ .
3. Determinare tutte le sfere che contengono  $C$  e che hanno raggio  $R = 1$ .
4. Determinare le sfere di raggio minimo che contengono  $C$ .

## Esercizio 2

Dato  $h \in \mathbb{R}$ , si consideri la forma quadratica su  $\mathbb{R}^4$ :

$$Q((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 2x_1^2 + 2(-x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 - 3x_2x_3 - x_2x_4 + hx_3x_4).$$

1. Determinare il parametro  $h$  in modo che il vettore  $\underline{v} = (1, 1, 1, -1)$  sia isotropo. Per tale valore di  $h$ , determinare una base di  $\ker \varphi$ , dove  $\varphi$  è la forma bilineare simmetrica associata a  $Q$ .
2. Determinare la segnatura di  $Q$  e scrivere  $Q$  in forma normale.

### Esercizio 3

Siano  $(V, \cdot)$  uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  una base ortonormale di  $V$ , e  $(x_1, x_2, x_3)$  le coordinate di un generico vettore di  $V$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

Sia  $W \subset V$  il piano vettoriale di equazione  $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ , e consideriamo l'endomorfismo  $p: V \rightarrow V$  dato dalla proiezione ortogonale su  $W$ .

1. Scrivere la matrice associata a  $p$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .
2. Mostrare che la funzione:

$$Q: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(v) = v \cdot p(v)$$

è una forma quadratica su  $V$ .

3. Determinare la segnatura di  $Q$  e una base  $\mathcal{B}_2$  di  $V$  tale che la matrice associata a  $Q$  rispetto a  $\mathcal{B}_2$  sia diagonale.

#### Esercizio 4

In  $\mathbb{R}^2$  è data la conica

$$C: 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x - y = 0.$$

Classificare e scrivere in forma canonica  $C$ , specificando le equazioni del cambiamento di riferimento. Trovare gli eventuali assi, vertici, centro e asintoti della conica.

### Esercizio 5

Nel piano, rispetto ad un riferimento cartesiano  $\mathcal{R} = (O; x, y)$ , è data la conica

$$C: 2x^2 + 2\sqrt{3}xy - 3 = 0.$$

Ridurre  $C$  a forma canonica e classificarla. Trovare gli eventuali assi, vertici, centro e asintoti della conica.