Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria DUE

I tre linguaggi della topologia

Alberto Albano

Vi sono tre modi equivalenti di dare una struttura di spazio topologico su un insieme X. I concetti fondamentali sono quelli di *sottoinsieme aperto*, *chiusura di un sottoinsieme* e *intorno di un punto* e dare una topologia significa dire quali sottoinsiemi sono aperti, qual è la chiusura di un sottoinsieme e quali sono gli intorni dei punti.

Tutte le definizioni e i teoremi successivi sono sempre espressi in termini di questi oggetti fondamentali e quindi la scelta del punto di partenza è di solito quella più comoda. A volte è semplice specificare gli aperti, in altre situazioni può essere più semplice specificare gli intorni.

In ognuno dei tre casi, si specificano i termini primitivi e ci sono degli assiomi che vanno rispettati. I tre sistemi di assiomi possono essere indicati con i nomi

$\mathcal{A}$: *insiemi aperti*: quali sono i sottoinsiemi che "circondano" ogni loro punto?

$\mathcal{K}$: *operatore di chiusura*: chi sono i punti "aderenti" ad un sottoinsieme?

$\mathcal{I}$: *intorni di un punto*: chi sono i punti "vicini" ad un punto dato?

Per esempio, per dare una topologia nel terzo sistema occorre specificare *tutti gli intorni di tutti i punti* e verificare che gli assiomi corrispondenti siano soddisfatti. Si possono poi definire gli aperti e l'operatore di chiusura in termini di intorni e gli assiomi degli altri due sistemi sono automaticamente soddisfatti.

Anche se i linguaggi e le definizioni sono equivalenti, non sono tutti intuitivi allo stesso modo. Il concetto intuitivamente più chiaro è probabilmente quello di intorno, che è stato il primo ad essere introdotto, ma al giorno d'oggi si preferisce usare come concetto primitivo quello di aperto perché gli assiomi degli aperti sono i più semplici.

In queste pagine vedremo i tre sistemi di assiomi, vedremo le definizioni dei concetti in termini l'uno dell'altro e dimostreremo l'equivalenza delle tre definizioni e cioè, usando un sistema di assiomi dimostreremo che gli enunciati presenti negli altri due sono veri.

La conclusione è che qualunque sia il modo in cui definiamo una struttura topologica su uno spazio, tutte le proprietà di aperti, chiusura e intorni sono sempre valide.

1 Gli assiomi

1.1 Il linguaggio $\mathcal{A}$ degli aperti

Sia X un insieme. La famiglia $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è la famiglia di aperti di una topologia se:

(A1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$

(A2) se $A_i \in \mathcal{T}$ per ogni $i \in I$, allora $A = \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

(A3) se A_1, $A_2 \in \mathcal{T}$, allora $A = A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$

I sottoinsiemi appartenenti a $\mathcal{T}$ si dicono *aperti*. Le proprietà (A2) e (A3) si enunciano a parole come

(A2) unione arbitraria di aperti è un sottoinsieme aperto

(A3) intersezione di due aperti è un sottoinsieme aperto

Una semplice induzione mostra che tutte le intersezioni *finite* di aperti sono sottoinsiemi aperti.

Usando il concetto di aperto come primitivo, diamo le definizioni:

Definizione 1.1.

1. un sottoinsieme $C \subseteq X$ è *chiuso* se $A = X \setminus C$ è aperto
2. per ogni $B \subseteq X$ la *chiusura* $\overline{B}$ è definita come
$$\overline{B} = \bigcap \{C \mid C \text{ chiuso}, B \subseteq C\}$$
e cioè l'intersezione di tutti i chiusi che contengono B
3. per ogni $x \in X$, l'insieme U è un *intorno di x* se esiste un insieme aperto V tale che $x \in V \subseteq U$

Osserviamo che possiamo riscrivere gli assiomi (A1–A3) passando ai complementari e si ottiene:

sia X un insieme. La famiglia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è la famiglia dei chiusi di una topologia se:

(C1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{C}$

(C2) se $C_i \in \mathcal{C}$ per ogni $i \in I$, allora $C = \bigcap_{i\in I} C_i \in \mathcal{C}$

(C3) se C_1, $C_2 \in \mathcal{C}$, allora $C = C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$

I sottoinsiemi appartenenti a $\mathcal{C}$ si dicono *chiusi*. Le proprietà (C2) e (C3) si enunciano a parole come

(C2) intersezione arbitraria di chiusi è un sottoinsieme chiuso

(C3) unione di due chiusi è un sottoinsieme chiuso

Una semplice induzione mostra che tutte le unioni *finite* di chiusi sono sottoinsiemi chiusi.

Notiamo che l'equivalenza dei gruppi di assiomi per gli aperti e per i chiusi è ovvia, poiché il passaggio al complementare scambia le unioni con le intersezioni. Gli *aperti* sono definiti come i complementari dei chiusi, mentre le definizione di *chiusura* e *intorno* sono le stesse.

1.2 Il linguaggio $\mathcal{K}$ dell'operatore di chiusura

Sia X un insieme. Un *operatore di chiusura* è una funzione $C : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ che soddisfa le proprietà

(K1) $\forall A \subseteq X \qquad A \subseteq C(A)$

(K2) $\forall A \subseteq X \qquad C(A) = C(C(A))$

(K3) $C(\emptyset) = \emptyset$

(K4) $\forall A, B \subseteq X \qquad C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$

La lettera K è in onore di Kazimierz Kuratowski[1] che propose l'operatore di chiusura come concetto fondamentale per introdurre una struttura topologica. Intuitivamente la chiusura di un sottoinsieme dovrebbe contenere i suoi punti aderenti, cioè i punti che si possono ottenere come "limiti" di punti nel sottoinsieme. Con questa interpretazione, gli assiomi K1, K2, K3 hanno un significato immediatamente comprensibile.

La lista degli assiomi di Kuratowski ne conteneva un quinto

(K5) $\forall x \in X \qquad C(\{x\}) = \{x\}$

e cioè i punti sono sottoinsiemi chiusi. Questa proprietà non è conseguenza degli assiomi degli aperti (per esempio, con la topologia banale i punti non sono chiusi) e oggi non viene più considerata una proprietà che uno spazio topologico deve necessariamente avere. Invece, l'assioma K5 si è trasformato in una definizione: uno spazio topologico è detto T1 se tutti i suoi punti sono chiusi. La proprietà T1 fa parte di una lista di proprietà dette *assiomi di separazione*, che studieremo in dettaglio in seguito.

Usando il concetto di operatore di chiusura come primitivo, diamo le definizioni:

Definizione 1.2.

1. un sottoinsieme $B \subseteq X$ è *chiuso* se $C(B) = B$
2. un sottoinsieme $A \subseteq X$ è *aperto* se $B = X \setminus A$ è chiuso
3. per ogni $x \in X$, l'insieme U è un *intorno di* x se esiste un insieme aperto V tale che $x \in V \subseteq U$

La definizione di intorno è la stessa data in precedenza. Dare una definizione di intorno usando direttamente l'operatore di chiusura è piuttosto scomodo e non necessario e quindi non lo faremo.

La differenza è che in precedenza gli aperti erano dati in partenza (la famiglia $\mathcal{T}$) mentre adesso gli aperti sono definiti come complementari dei chiusi che si ottengono dall'operatore di chiusura.

[1] vedi https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kuratowski per una biografia di Kuratowski

1.3 Il linguaggio $\mathcal{I}$ degli intorni

Sia X un insieme. Per ogni $x \in X$, è assegnata una famiglia $I(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che:

(I1) $X \in I(x)$ per ogni punto $x \in X$

(I2) $U \in I(x) \implies x \in U$

(I3) $U \in I(x)$ e $U \subseteq V \implies V \in I(x)$

(I4) $U, V \in I(x) \implies U \cap V \in I(x)$

(I5) $U \in I(x) \implies$ esiste $V \subset U$ tale che $x \in V$ e $V \in I(y)$ per ogni $y \in V$

$U \in I(x)$ si legge "U è un intorno di x". Intuitivamente, un intorno del punto x è un insieme che "circonda" o "avvolge" il punto x. Con questa interpretazione i primi 4 assiomi sono facili da capire.

L'assioma I5 è più misterioso e si comprende solo dopo aver dato la definizione di aperto in termini di intorni.

Definizione 1.3.

1. un sottoinsieme $A \subseteq X$ è *aperto* se $\forall x \in A : \ A \in I(x)$, cioè se A è un intorno di ogni suo punto
2. un sottoinsieme $C \subseteq X$ è *chiuso* se $A = X \setminus C$ è aperto
3. per ogni $B \subseteq X$ la *chiusura* $\overline{B}$ è definita come

$$\overline{B} = \bigcap \{C \mid C \text{ chiuso}, B \subseteq C\}$$

   e cioè l'intersezione di tutti i chiusi che contengono B

Leggendo la definizione di aperto, l'insieme V nell'assioma I5 risulta aperto e quindi I5 dice che un intorno contiene un aperto che contiene il punto, legandosi perciò alla definizione di intorno in termini di aperti.

Vedremo che l'assioma I5 non è necessario per definire una famiglia di aperti e dimostrare che è una topologia. Discuteremo il significato di I5 e il motivo della sua inclusione nella lista di assiomi quando vedremo le dimostrazioni di equivalenza fra il linguaggio degli aperti e quello degli intorni. Osserviamo inoltre che l'assioma I2 è una conseguenza immediata di I5. Discuteremo più avanti anche del suo ruolo.

Nei paragrafi seguenti dimostreremo che ognuno dei gruppi di assiomi implica gli altri due e quindi per sviluppare tutta la teoria degli spazi topologici non solo basta assumere un solo gruppo come punto di partenza, ma anche tutte le altre affermazioni sono vere.

Prima di cominciare le dimostrazioni, osserviamo che molte di queste sono quasi immediate, mentre altre sono più elaborate e richiedono alcuni passaggi. In ogni caso nel testo che segue scriveremo tutti i dettagli.

Come esercizio di *scrittura*, provate a fare le dimostrazioni da soli prima di leggere il testo. Se non trovate una dimostrazione, come esercizio di *lettura* sforzatevi di capire quali sono le dimostrazioni immediate e quali invece no.

2 L'equivalenza aperti–chiusura

2.1 Dagli aperti all'operatore di chiusura

Sia X un insieme e sia $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia che soddisfa gli assiomi A1–A3. Chiameremo gli elementi di $\mathcal{T}$ *aperti* e definiamo i chiusi, l'operatore di chiusura e gli intorni come nella Definizione 1.1. In particolare, poniamo

$$C(A) = \overline{A} = \bigcap \{C \mid C \text{ chiuso}, A \subseteq C\}$$

Osserviamo subito che per i chiusi valgono gli assiomi C1–C3 che si ottengono dagli assiomi A1–A3 in modo immediato. Useremo quindi anche gli assiomi C1–C3 come ipotesi. Facciamo qualche osservazione preliminare.

Lemma 2.1. *Sia X con la famiglia di aperti $\mathcal{T}$.*

1. *Se $A \subset X$ è chiuso, allora $C(A) = A$.*
2. *Se $A \subseteq B$ allora $C(A) \subseteq C(B)$.*

Dimostrazione.
1. L'insieme A è uno degli insiemi che si devono intersecare ed è contenuto in tutti gli altri.
2. I chiusi che contengono B contengono anche A e dunque compaiono nell'intersezione che calcola $C(A)$.

□

Dimostriamo adesso gli assiomi K1–K4, a partire dagli assiomi (A) e (C).
[**K1**] $\forall A \subseteq X \qquad A \subseteq C(A)$

Dimostrazione. Per definizione di chiusura, tutti gli insiemi che si intersecano per formare $C(A)$ contengono A e quindi A è contenuto nell'intersezione. □

[**K2**] $\forall A \subseteq X \qquad C(A) = C(C(A))$

Dimostrazione. Per definizione di chiusura, $C(A)$ è l'intersezione di chiusi e quindi (per C2) l'insieme $C(A)$ è chiuso. La tesi segue dal Lemma 2.1. □

[**K3**] $C(\emptyset) = \emptyset$

Dimostrazione. Per l'assioma C1, l'insieme vuoto è chiuso e quindi la tesi segue dal Lemma 2.1. □

[**K4**] $\forall A, B \subseteq X \qquad C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$

Dimostrazione. Gli insieme $C(A)$ e $C(B)$ sono chiusi e quindi $C(A) \cup C(B)$ è chiuso per l'assioma C3. Poiché $A \cup B \subseteq C(A) \cup C(B)$ (per K1) e la chiusura è il più piccolo chiuso che contiene un insieme abbiamo l'inclusione

$$C(A \cup B) \subseteq C(A) \cup C(B)$$

Dimostriamo ora l'inclusione opposta. Dall'inclusione $A \subseteq A \cup B$ e dal Lemma 2.1 si ha $C(A) \subseteq C(A \cup B)$. Usando anche l'inclusione $B \subseteq A \cup B$ si ottiene

$$C(A) \cup C(B) \subseteq C(A \cup B)$$

□

Osservazione. L'assioma K4 non vale per unioni infinite, come abbiamo anche visto a lezione. Un semplice esempio è: prendiamo $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea e consideriamo gli intervalli aperti

$$A_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right), \qquad n \geq 3$$

(Osserviamo che $A_1 = (1, 0)$ non ha senso e $A_2 = (1/2, 1/2) = \emptyset$). Allora si ha

$$C(A_n) = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

e:

$$\bigcup_{n\geq 3} A_n = (0,1), \qquad \bigcup_{n\geq 3} C(A_n) = (0,1)$$

Dunque

$$\bigcup_{n\geq 3} C(A_n) = (0,1) \subsetneq [0,1] = C\left(\bigcup_{n\geq 3} A_n\right)$$

2.2 Dall'operatore di chiusura agli aperti

Sia X un insieme e $C : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ un operatore di chiusura, cioè una funzione tra sottoinsiemi di X che soddisfa gli assiomi K1–K4. Definiamo i chiusi, gli aperti e gli intorni come nella Definizione 1.2. In particolare i chiusi sono i *punti fissi* dell'operatore C.

Poniamo $\mathcal{C}$ = insieme di tutti i chiusi di X e dimostriamo gli assiomi C1–C3 a partire dagli assiomi K1–K4. Osserviamo che il Lemma 2.1 vale con lo stesso enunciato, ma la dimostrazione è differente perché adesso le ipotesi sono gli assiomi K e non gli assiomi C.

Lemma 2.2. *Sia X con l'operatore di chiusura $C : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$.*

1. *Se $A \subset X$ è chiuso, allora $C(A) = A$.*
2. *Se $A \subseteq B$ allora $C(A) \subseteq C(B)$.*

Dimostrazione.

1. Questa è la definizione di insieme chiuso.
2. Se $A \subseteq B$ allora $A \cup B = B$. Per K4 si ha

$$C(A) \subseteq C(A) \cup C(B) = C(A \cup B) = C(B)$$

□

Dimostriamo adesso gli assiomi C1–C3, a partire dagli assiomi (K).

[C1] $\emptyset$, $X \in \mathcal{C}$

Dimostrazione. $\emptyset \in \mathcal{C}$ per l'assioma K3 e la definizione di chiuso.

Poiché $C(X)$ è un sottoinsieme di X, si ha $C(X) \subseteq X$. L'assioma $K1$ dà l'inclusione opposta e quindi $X = C(X)$ e cioè $X \in \mathcal{C}$.

□

[C2] se $A_i \in \mathcal{C}$ per ogni $i \in I$, allora $A = \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{C}$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $A = C(A)$. Per prima cosa, l'assioma K1 dà $A \subseteq C(A)$. Vediamo dunque l'inclusione opposta.

Per definizione di intersezione si ha $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i, \forall i \in I$ e quindi, per il punto 2 del Lemma 2.2 e per il fatto che gli insiemi A_i sono chiusi si ha

$$C\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq C(A_i) = A_i, \quad \forall i \in I$$

e dunque

$$C(A) = C\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i = A$$

che è la tesi. □

[C3] se $A, B \in \mathcal{C}$, allora $A \cup B \in \mathcal{C}$

Dimostrazione. Per definizione di chiuso $A = C(A)$, $B = C(B)$. Dunque per l'assioma K4

$$A \cup B = C(A) \cup C(B) = C(A \cup B)$$

e cioè $A \cup B$ è chiuso. □

Osserviamo che non abbiamo mai usato l'assioma K2. Capiremo l'importanza di questo assioma fra breve.

2.3 L'equivalenza

Abbiamo appena visto che usando gli aperti (o meglio i chiusi) si può definire un operatore di chiusura e che viceversa da un operatore di chiusura si può definire una famiglia di chiusi (e di conseguenza una famiglia di aperti).

Per avere l'equivalenza fra i due approcci c'è ancora una cosa da verificare e cioè che i due processi siano l'uno l'inverso dell'altro. Esplicitamente, consideriamo le due domande seguenti:

Domanda 1. Sia $\mathcal{T}$ una topologia su X e sia $A \to \overline{A}$ l'operatore definito usando $\mathcal{T}$. Abbiamo dimostrato che è un operatore di chiusura. Usando questo operatore, abbiamo dimostrato che è possibile ottenere una topologia $\mathcal{T}'$.

È vero che $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$?

Domanda 2. Sia $C : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ un operatore di chiusura. Abbiamo dimostrato che da C è possibile ottenere una topologia $\mathcal{T}$. In questa topologia abbiamo l'operatore $A \to \overline{A}$.

È vero che $\forall A \subseteq X \qquad C(A) = \overline{A}$?

La risposta ad entrambe le domande è SI, e cioè le costruzioni che abbiamo fatto sono veramente inverse l'una dell'altra. Vediamo adesso le dimostrazioni. L'assioma K2 sarà usato nella risposta alla domanda 2.

Risposta alla domanda 1. Sia X un insieme con una topologia $\mathcal{T}$ e sia $\mathcal{C}$ la famiglia dei chiusi, che soddisfa gli assiomi (C). In questa topologia la nozione di chiusura è

$$\overline{A} = \bigcap \{C \mid C \in \mathcal{C}, A \subseteq C\}$$

Usando l'operatore $C(A) = \overline{A}$ definiamo

$$\mathcal{C}' = \{A \subseteq X \mid A = \overline{A}\}$$

che è la famiglia di chiusi di una topologia $\mathcal{T}'$. Dimostriamo che $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ (e cioè le topologie sono la stessa).

Se $A \in \mathcal{C}$ significa che è chiuso nella topologia di partenza. Allora $A = \overline{A}$ (Lemma 2.1) e quindi $A \in \mathcal{C}'$ per definizione.

Per l'implicazione opposta, consideriamo $A \in \mathcal{C}'$. Allora $A = \overline{A}$ che significa che A è chiuso nella topologia di partenza e cioè $A \in \mathcal{C}$. □

Risposta alla domanda 2. Sia X un insieme con un operatore di chiusura C che soddisfa gli assiomi (K) e sia

$$\mathcal{C} = \{A \subseteq X \mid A = C(A)\}$$

la famiglia dei chiusi di una topologia $\mathcal{T}$.

In questa topologia la nozione di chiusura è

$$\overline{A} = \bigcap \{C \mid C \in \mathcal{C}, A \subseteq C\}$$

e dimostriamo che $C(A) = \overline{A}$.

$A \subseteq C(A)$ per l'assioma K1 e $C(A) \in \mathcal{C}$ per l'assioma K2 (qui si vede l'importanza dell'assioma K2). Dunque $C(A)$ è uno degli insiemi che consideriamo nell'intersezione che calcola $\overline{A}$ e quindi

$$\overline{A} \subseteq C(A)$$

Per l'inclusione opposta usiamo il Lemma 2.2. Poiché $A \subseteq \overline{A}$ si ha $C(A) \subseteq C(\overline{A})$. Inoltre $\overline{A} \in \mathcal{C}$, e quindi $C(\overline{A}) = \overline{A}$. Abbiamo perciò

$$C(A) \subseteq \overline{A}$$

che è la tesi. □

3 L'equivalenza aperti–intorni

3.1 Dagli aperti agli intorni

Sia X un insieme e sia $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia che soddisfa gli assiomi A1–A3. Chiameremo gli elementi di $\mathcal{T}$ *aperti* e definiamo i chiusi, l'operatore di chiusura e gli intorni come nella Definizione 1.1. In particolare, per ogni $x \in X$ denotiamo con $I(x)$ la famiglia di tutti gli intorni di x, con la definizione

$$\forall U \subseteq X \qquad U \in I(x) \iff \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subseteq U$$

e cioè, a parole, U è un intorno di x se e solo se esiste un aperto V contenuto in U che contiene x. Per semplificare il discorso, introduciamo il concetto di *interno* di un insieme.

Definizione 3.1. Sia X con la topologia $\mathcal{T}$ e sia $A \subseteq X$. L'*interno di* A, denotato con il simbolo $\mathring{A}$ è l'unione di tutti gli aperti contenuti in A:

$$\mathring{A} = \bigcup \{V \mid V \text{ aperto}, V \subseteq A\}$$

Dalla definizione segue immediatamente $\mathring{A} \subseteq A$. Come prima, dimostriamo un lemma preliminare per semplificare le dimostrazioni successive.

Lemma 3.2. *Sia X con la famiglia di aperti $\mathcal{T}$ e la definizione di intorno data sopra.*

1. *$A \subset X$ è aperto se e solo se $A = \mathring{A}$.*
2. *$A \subset X$ è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.*

Dimostrazione.

1. Per ogni $A \subseteq X$ l'insieme $\mathring{A}$ è aperto per l'assioma A2 perché unione di aperti. Dunque $A = \mathring{A} \implies A$ aperto.

   Viceversa, se A è aperto, allora è uno degli insiemi la cui unione calcola $\mathring{A}$ e quindi $A \subseteq \mathring{A}$. L'inclusione opposta è sempre vera e quindi abbiamo l'uguaglianza.

2. Sia A aperto e $x \in A$. Allora possiamo prendere $V = A$ nella definizione di intorno e poiché $x \in A \subseteq A$, si ha $A \in I(x)$.

   Viceversa, per ogni $x \in A$ esiste un aperto V_x tale che $x \in V_x \subseteq A$. Dunque $A = \bigcup_{x \in A} V_x$ e quindi è aperto perché unione di aperti.

□

Dimostriamo adesso gli assiomi I1–I5, a partire dagli assiomi (A).

[I1] $X \in I(x)$ per ogni punto $x \in X$

Dimostrazione. X è aperto (assioma A1) e quindi è intorno di ogni punto per il Lemma 3.2. □

[I2] $U \in I(x) \implies x \in U$

Dimostrazione. Per definizione di intorno esiste V aperto tale che $x \in V \subseteq U$ e quindi $x \in U$. □

[I3] $U \in I(x)$ e $U \subseteq V \implies V \in I(x)$

Dimostrazione. $U \in I(x)$ dice che esiste un aperto V_x tale che $x \in V_x \subseteq U$. Poiché $U \subseteq V$ si ha $x \in V_x \subseteq V$ e quindi $V \in I(x)$. □

[I4] $U, V \in I(x) \implies U \cap V \in I(x)$

Dimostrazione. Per ipotesi esistono due aperti U_x, V_x tali che

$$x \in U_x \subseteq U, \qquad x \in V_x \subseteq V$$

Allora

$$x \in U_x \cap V_x \subseteq U \cap V$$

e $U_x \cap V_x$ è aperto per l'assioma A3. Allora $U \cap V \in I(x)$ □

[I5] $U \in I(x) \implies$ esiste $V \subset U$ tale che $x \in V$ e $V \in I(y)$ per ogni $y \in V$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste un aperto V tale che $x \in V \subseteq U$. Poiché V è aperto, per il Lemma 3.2 V è intorno di ogni suo punto, che è la tesi. □

3.2 Dagli intorni agli aperti

Infine, sia X un insieme e per ogni $x \in X$ sia assegnata una famiglia $I(x)$ di sottoinsiemi di X che soddisfano gli assiomi I1–I5. Gli elementi di $I(x)$ si chiamano *intorni del punto* x e definiamo gli aperti e i chiusi come nella Definizione 1.3.

In particolare, definiamo la famiglia $\mathcal{T}$ degli aperti:

$$\forall A \subseteq X \qquad A \in \mathcal{T} \iff \forall x \in A,\ A \in I(x)$$

e cioè, a parole, A è un aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto. Possiamo di nuovo definire il concetto di *interno* di un insieme, questa volta usando il linguaggio degli intorni:

Definizione 3.3. Sia $A \subseteq X$. L'*interno di* A, denotato con il simbolo $\mathring{A}$ è definito come

$$x \in \mathring{A} \iff A \in I(x)$$

Dalla definizione e dall'assioma I2 segue immediatamente $\mathring{A} \subseteq A$. Nuovamente, il lemma Lemma 3.2 vale con lo stesso enunciato ma con una dimostrazione diversa perché adesso le ipotesi sono gli assiomi (I) e non gli assiomi (A).

Lemma 3.4. *Sia X con gli intorni definiti dalle famiglie $I(x)$ e la definizione di aperto data sopra.*

1. *$A \subset X$ è aperto se e solo se $A = \mathring{A}$.*
2. *$A \subset X$ è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.*

Dimostrazione.

1. Per ogni $A \subseteq X$ l'insieme $\mathring{A}$ è aperto per definizione, in quanto intorno di ogni suo punto. Dunque $A = \mathring{A} \implies A$ aperto.

   Viceversa, se A è aperto, per definizione è intorno di ogni suo punto e quindi per ogni $x \in A$ si ha $x \in \mathring{A}$ e dunque $A = \mathring{A}$.

2. Questa è la definizione di insieme aperto.

□

Dimostriamo adesso che la famiglia $\mathcal{T}$ soddisfa gli assiomi A1–A3, a partire dagli assiomi (I).

[A1] $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$

Dimostrazione. $\emptyset \in \mathcal{T}$ perché la condizione di essere aperto è sugli elementi dell'insieme e in questo caso non ce ne sono.

Per l'assioma I1, $X \in I(x)$ per ogni $x \in X$ e questa è la definizione di aperto. □

[A2] se $A_i \in \mathcal{T}$ per ogni $i \in I$, allora $A = \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

Dimostrazione. Sia $x \in A$. Allora $\exists i_0 : x \in A_{i_0}$. Per definizione di aperto si ha $A_{i_0} \in I(x)$. Poiché $A_{i_0} \subseteq A$, per l'assioma I3 si ha $A \in I(x)$. Dunque A è intorno di ogni suo punto e quindi è aperto per il Lemma 3.4. □

[A3] se A_1, $A_2 \in \mathcal{T}$, allora $A = A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$

Dimostrazione. Sia $x \in A$. Per definizione di aperto si ha $A_1, A_2 \in I(x)$ e per l'assioma I4 si ha $A_1 \cap A_2 \in I(x)$. Dunque $A_1 \cap A_2$ è intorno di ogni suo punto e quindi è aperto per il Lemma 3.4. □

3.3 L'equivalenza

Come prima, dobbiamo dimostrare che le costruzioni dagli aperti agli intorni e dagli intorni agli aperti sono inverse l'una dell'altra e cioè dobbiamo rispondere alle domande:

Domanda 1. Sia $\mathcal{T}$ una topologia su X e per ogni $x \in X$ sia $I(x)$ la famiglia di intorni di x. Abbiamo dimostrato che queste famiglie soddisfano gli assiomi (I) e abbiamo dimostrato che con queste famiglie è possibile ottenere una topologia $\mathcal{T}'$.

È vero che $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$?

Domanda 2. Sia X un insieme e per ogni $x \in X$ sia assegnata una famiglia $I(x)$ di sottoinsiemi di X che soddisfano gli assiomi I1–I5. Abbiamo dimostrato che da queste famiglie è possibile ottenere una topologia $\mathcal{T}$. In questa topologia ogni punto ha una famiglia di intorni $J(x)$.

È vero che $\forall x \in X \qquad I(x) = J(x)$?

Anche questa volta la risposta ad entrambe le domande è SI, e cioè le costruzioni che abbiamo fatto sono inverse l'una dell'altra. Vediamo adesso le dimostrazioni. L'assioma I5 sarà usato nella risposta alla domanda 2.

Risposta alla domanda 1. Sia X un insieme con una topologia $\mathcal{T}$. In questa topologia la nozione di intorno è

$$U \in I(x) \iff \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subseteq U$$

Usando queste famiglie di intorni definiamo la topologia $\mathcal{T}'$

$$A \in \mathcal{T}' \iff \forall x \in A : A \in I(x)$$

Dimostriamo che $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ (e cioè le topologie sono la stessa).

$A \in \mathcal{T}$ significa che è aperto nella topologia di partenza e quindi, per definizione di intorno, $\forall x \in A : A \in I(x)$. Ma questa è proprio la condizione $A \in \mathcal{T}'$.

Per l'implicazione opposta, consideriamo $A \in \mathcal{T}'$. Allora $\forall x \in A : A \in I(x)$ e cioè A è intorno (nella topologia $\mathcal{T}$!) di ogni suo punto. Per il Lemma 3.2 $A \in \mathcal{T}$. □

Risposta alla domanda 2. Sia X un insieme con le famiglie di insiemi $I(x)$ che soddisfano gli assiomi (I) e sia $\mathcal{T}$ la famiglia definita da

$$A \in \mathcal{T} \iff \forall x \in A : A \in I(x)$$

Sappiamo che $\mathcal{T}$ è una topologia (i suoi elementi saranno gli aperti). In questa topologia le famiglie di intorni $J(x)$ sono definite da

$$U \in J(x) \iff \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subseteq U$$

e dimostriamo che $\forall x \in X : I(x) = J(x)$.

Sia $U \in I(x)$. Per l'assioma I5, esiste $V \subseteq U$ tale che $x \in V$ e $V \in I(y)$ per ogni $y \in V$. Ma questo significa che $V \in \mathcal{T}$, perché è intorno (nel senso $I(x)$!) di ogni suo punto. Allora per definizione di intorno nella topologia $\mathcal{T}$ si ha $U \in J(x)$.

Per l'inclusione opposta sia $U \in J(x)$. Allora per definizione della famiglia $J(x)$ esiste $V \in \mathcal{T} : x \in V \subseteq U$. Poiché $V \in \mathcal{T}$ e $x \in V$ si ha $V \in I(x)$. Poiché $V \subseteq U$, anche $U \in I(x)$ per l'assioma I3. $\square$