Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 2 - 11 Ottobre 2022

Esercizio 1. *(Definizione di topologia, chiusura)* Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{R}\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \notin A\}.$$

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$.
2. Sia $Y = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, determinare la chiusura di Y in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
3. Dimostrare che ogni sottoinsieme $S \subset Y$ si ottiene come intersezione di un chiuso di $\mathbb{R}$ con Y e dunque la topologia indotta da $\mathcal{T}$ su Y è la topologia discreta.

Esercizio 2. *(Funzioni continue)* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, dove $\mathbb{R}$ è dotato della topologia euclidea. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ denotiamo:

$$M(k) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > k\} \quad m(k) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < k\}.$$

Dimostrare che f è continua se e solo se $M(k)$ e $m(k)$ sono aperti per ogni k.

Esercizio 3. *(Funzioni aperte, basi topologia)* Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e $\mathcal{B}$ una base della topologia di X. Dimostrare che f è aperta se e solo se $f(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$.

Esercizio 4. *(Funzioni continue)* Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia cofinita. Per ognuna delle seguenti funzioni dire se è continua:

(a) $f : X \to X,\ f(x) = x(x-1)(x-2)$;

(b) $g : X \to X,\ g(x) = \sin x$;

(c) $h : X \to X,\ h(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x \geq 0, \\ -x+5 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Esercizio 5. *(Chiusura nei sottospazi)* Sia X uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ un sottospazio e sia $A \subseteq Y$. Indichiamo con $\mathrm{cl}_X(A)$ la chiusura di A come sottoinsieme di X e con $\mathrm{cl}_Y(A)$ la chiusura di A come sottoinsieme di Y (nella topologia indotta di sottospazio).

1. Dimostrare che $\mathrm{cl}_Y(A) \subseteq \mathrm{cl}_X(A)$.
2. Dare un esempio per mostrare che in generale $\mathrm{cl}_Y(A) \neq \mathrm{cl}_X(A)$.
3. Determinare condizioni *necessarie* e/o *sufficienti* su Y in modo che per ogni $A \subseteq Y$ si abbia $\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A)$.

Esercizio 6. *(Funzioni continue/aperte e densità)* Sia $f : X \to Y$ una funzione continua.

1. Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f(A)$ è denso in $f(X)$ (con la topologia di sottospazio).
2. Sia f aperta, sia $D \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(D)$ è denso in X. La continuità di f è necessaria?

Esercizio 7. *(Spazi T1)* Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso e Y uno spazio topologico T_1. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua che è costante su A. Dimostrare che f è costante su tutto X.

Esercizio 8. *(Topologie e proprietà T1)* Sia X un insieme con infiniti elementi e sia $a \in X$ fissato. Sia data la famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X definita da

$$A \in \mathcal{T} \iff A = \emptyset \text{ oppure } a \in A.$$

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ definisce su X una topologia.
2. Lo spazio $(X, \mathcal{T})$ è $T1$?
3. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione, dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali con la topologia euclidea. Dimostrare che f è continua se e solo se f è costante.