Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 3 - 18 Ottobre 2022

Esercizio 1. *(Confronto di topologie e top prodotto)* Si considerino le seguenti topologie su $\mathbb{R}^2$:

1. $\mathcal{E}$ = topologia euclidea;
2. $\mathcal{Z}$ = topologia di Zariski, i cui chiusi sono gli insiemi del tipo $V(I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x,y) = 0 \text{ per ogni } p \in I\}$, dove $I \subset \mathbb{R}[x,y]$ è un ideale;
3. $\mathcal{C}$ = topologia prodotto ottenuta dal prodotto di della topologia cofinita su $\mathbb{R}$ con se stessa;
4. $\mathcal{D}$= topologia cofinita.

Confrontare, secondo la relazione di finitezza, le topologie date.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e Y uno spazio con almeno due punti distinti con la topologia discreta. Dimostrare che X è connesso se e solo se ogni funzione continua $f : X \to Y$ è costante.

Esercizio 3. Dimostrare che ogni omeomorfismo trasforma componenti connesse in componenti connesse. Cioè: se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo e $C \subseteq X$ è una componente connessa di X, allora $f(C)$ è una componente connessa di Y. Concludere che due spazi omeomorfi hanno lo stesso numero di componenti connesse.

Esercizio 4. Dire, motivando la risposta, se i seguenti spazi topologici (dotati della topologia euclidea) sono omeomorfi:

- $X = [0,1]$ e $Y = (0,1)$,
- $X = [0,1]$ e $Y = S^1$,
- $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ e $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 = 1\}$,
- $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, si considerino i sottospazi:

$$A = \{(x,n) \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \quad \text{e} \quad B = \left\{(x,y) \mid y = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}.$$

Si consideri inoltre l'applicazione continua $g : A \to B$ definita da

$$g(x,n) = \left(x, \frac{x}{n}\right).$$

1. A è connesso per archi? è chiuso in $\mathbb{R}^2$?

2. B è connesso per archi? è chiuso in $\mathbb{R}^2$?
3. Sia $C = \{(x, 1) \in A \mid -1 \leq x \leq 1\}$; C è chiuso in A? $g(C)$ è chiuso in B?

Esercizio 6. Sia X uno spazio topologico e siano A e B due sottospazi compatti.

1. E' noto che $A \cup B$ è compatto.
2. Se X è di Hausdorff, dimostrare che $A \cap B$ è compatto.
3. Trovare un esempio in cui $A \cap B$ non è compatto

Esercizio 7. Sia J l'intervallo chiuso $[0, 1]$ con la topologia i cui aperti sono il vuoto, $[0, 1]$, e gli intervalli $[0, a)$ con $a \in [0, 1]$.

1. J è T_1 e/o T_2?
2. Mostrare che $\{0, 1\}$ con la topologia indotta da J è connesso per archi.
3. Sia I l'intervallo chiuso $[0, 1]$ con la topologia euclidea, e sia $X = I \times J$ con la topologia prodotto. Determinare la chiusura in X di

$$\Delta = \{(x, x) \in X \mid x \in [0, 1]\}.$$

4. Dare un esempio di un sottoinsieme $C \subset J$ di cardinalità infinita, compatto, ma non chiuso.