Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 4 - 25 ottobre 2022

Esercizio 1. Sia $X = M(2, \mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali con la topologia euclidea e sia

$$Y = \{A \in X \mid A^2 = I\},$$

dove I è la matrice identità.

1. dimostrare che Y è chiuso;
2. dimostrare che Y non è compatto;
3. Y è connesso?

Esercizio 2. Sia X contenuto nel piano $\mathbb{R}^2$ definito come segue. Per ogni intero $n \geq 1$, poniamo $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1/n,\ 0 \leq y \leq 1\}$ e definiamo lo spazio topologico

$$X = \bigcup_{n \geq 1} A_n \cup \{(0, 0), (0, 1)\}$$

con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che:

1. X non è compatto;
2. per ogni n, il sottoinsieme A_n è aperto e chiuso in X;
3. per ogni n, il sottoinsieme A_n è una componente connessa di X;
4. i punti $\{(0, 0)\}$ e $\{(0, 1)\}$ sono componenti connesse di X.

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico e sia I l'intervallo chiuso $[0, 1]$ con la topologia euclidea. Poniamo $Z = X \times \{0\} \subseteq X \times I$. Indichiamo con Y il quoziente $(X \times I)/Z$ (cioè modulo la relazione di equivalenza che identifica Z ad un punto). Lo spazio Y viene solitamente chiamato il *cono* su X.

1. Dimostrare che Y è connesso per archi.
2. Dimostrare che se X è compatto allora Y è compatto
3. Dimostrare che se X è compatto e di Hausdorff, allora Y è di Hausdorff.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$, con la topologia euclidea, consideriamo il punto $N = (0, 0, 1)$ e i sottospazi:

$$X = S^2 \smallsetminus \{N\}, \qquad E = \{(x, y, z) \in X \mid z = 0\}.$$

Sia $Y = X/E$ lo spazio quoziente ottenuto per contrazione di E a un punto, e sia $\pi \colon X \to Y$ la proiezione sul quoziente.

1. Y è connesso?
2. $Y \smallsetminus \pi(E)$ è connesso?
3. Y è compatto?