Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 6 – a.a. 2022-23

Da consegnare: mercoledì 9 novembre

Esercizio 1. *(Esercizio 5.18. del Manetti)* Ricordiamo che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è il quoziente di $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ (con la topologia euclidea) rispetto all'azione del gruppo $G = \mathbb{R}^*$ per moltiplicazione. Indichiamo con $[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ la classe di equivalenza del vettore non nullo $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Quindi $[x_0, x_1]$ significa un vettore non nullo determinato a meno di proporzionalità.

Dimostrare che la funzione $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S^1$ data da

$$[x_0, x_1] \mapsto \left(\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{2x_0x_1}{x_0^2 + x_1^2} \right)$$

è ben definita ed è un omeomorfismo.

Esercizio 2. (dall'esercizio 1 dello scritto di luglio 2018) Consideriamo l'insieme $X = [0, 2) \subset \mathbb{R}$ e la famiglia di sottoinsiemi di X:

$$\mathcal{T} = \{[0, a) \mid 0 \leq a \leq 2\}.$$

N.B. per $a = 0$, $[0, 0) = \emptyset$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.

(b) Dire se $(X, \mathcal{T})$ è separabile.

(c) Dire se $(X, \mathcal{T})$ è a base numerabile.

Esercizio 3. Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia cofinita. Mostrare che la successione $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ogni elemento.

Esercizio 4. (Manetti, Esercizio 6.7) Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una funzione biunivoca (qualunque!) fra i numeri naturali e i numeri razionali, cioè:

1. $a_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$
2. a è iniettiva e l'immagine $a(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$.

Pensando alla funzione a come ad una successione a valori reali, determinare i punti di accumulazione.

Suggerimento (di Manetti): ogni aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ contiene infiniti numeri razionali.

Esercizio 5. Sia X uno spazio topologico, $B \subseteq X$ un sottoinsieme e sia $p \in X$ un punto. Si dice che p è un *punto di accumulazione per B* se ogni intorno di p contiene punti di B diversi da p. (Questa è esattamente la definizione data nel corso di Analisi UNO).

Sia ora $a : \mathbb{N} \to X$ una successione e poniamo $A = a(\mathbb{N}) \subseteq X$, l'immagine della successione. Sia $p \in X$ e consideriamo le due affermazioni:

1. p è un punto di accumulazione per la successione $\{a_n\} \implies p$ è un punto di accumulazione per l'insieme A

2. p è un punto di accumulazione per l'insieme $A \implies p$ è un punto di accumulazione per la successione $\{a_n\}$

Determinare se le due affermazioni sono vere o false, fornendo una dimostrazione oppure un controesempio.

È possibile rendere vera una affermazione falsa aggiungendo ipotesi sullo spazio X? (per esempio, si potrebbe aggiungere X soddisfa il primo assioma o il secondo assioma di numerabilità, oppure X è compatto oppure X è uno spazio metrico . . .)