Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 6 - 15 Novembre 2022

Esercizio 1. Sia $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ la circonferenza unitaria (pensata come numeri complessi di norma 1) e sia $X = S^1 \times [0,1]$. Definiamo la seguente relazione su X

$$(x,t) \sim (y,s) \iff tx = sy$$

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo al disco unitario chiuso $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Esercizio 2. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e suriettiva. Provare che se X è separabile allora Y è separabile. Se f è anche aperta, provare che, se X ha una base numerabile, anche Y ha una base numerabile.

Esercizio 3. Si consideri la successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. In quali tra le topologie banale, cofinita, discreta, euclidea tale successione converge a 0?

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico con la topologia cofinita.

1. Sia $\{x_n\}_n$ una successione in X tale che per ogni $\overline{x} \in X$, esistono infiniti indici $m \in \mathbb{N}$ tali che $x_m \neq \overline{x}$. E' vero che ogni $x \in X$ è punto di accumulazione per tale successione?
2. Sia $\{x_n\}_n$ una successione in X tale che per ogni $\overline{x} \in X$, esistono un numero finito di indici $m \in \mathbb{N}$ tali che $x_m = \overline{x}$. Dimostrare che tale successione converge a ogni $x \in X$.

Esercizio 5. Dire quali tra questi spazi topologici (con la topologia euclidea) sono tra loro omotopicamente equivalenti, motivando la risposta:

1. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$
3. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x = y = 0\}$
4. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$

Esercizio 6. Siano A e B due sottospazi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea. Dire se la seguente affermazione è vera o falsa, dando una dimostrazione o un controesempio:

Se A e B hanno lo stesso tipo di omotopia, allora i complementari $\mathbb{R}^2 \setminus A$ e $\mathbb{R}^2 \setminus B$ hanno lo stesso tipo di omotopia.