Geometria 2 - 21/11/2022

<u>Lemma del numero di Lebesgue:</u>

(X,d) spazio metrico cpt
$\mathcal{A}$ ricopr. aperto di X
$\exists \delta$ t.c. ogni palla aperta di X di diametro $< \delta$ è contenuta in qualche aperto di $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A} = \{U_1, \dots, U_n\}$

$C_i = X \setminus U_i$ chiusi

$f_i : X \to \mathbb{R}$ funzione distanza da C_i

$f = \max(f_1, \dots, f_n) : X \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \max(f_1(x), \dots, f_n(x))$

f continua, $f \geq 0$, in effetti $f > 0$

$\delta :=$ minimo di f su X

Mostriamo che δ è il numero di Lebesgue per il ricoprimento.

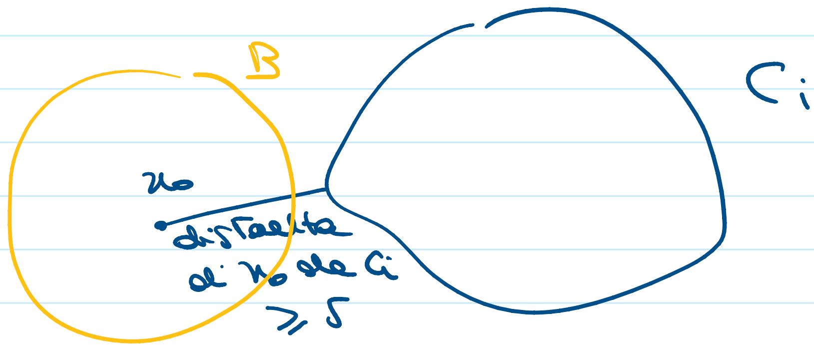
Sia $B \subset X$ una palla aperta di diametro $< \delta$

Sia $x_0 \in B$ e consideriamo $f(x_0) = \max(f_1(x_0), \dots, f_n(x_0))$

Sia i t.c. $f(x_0) = \underbrace{f_i(x_0)}_{\text{distanza di } x_0 \text{ da } C_i} \geq \delta$

$B \subseteq U_i \iff B \cap C_i = \emptyset$

$B \subseteq U_i \iff B \cap C_i = \emptyset$

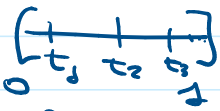


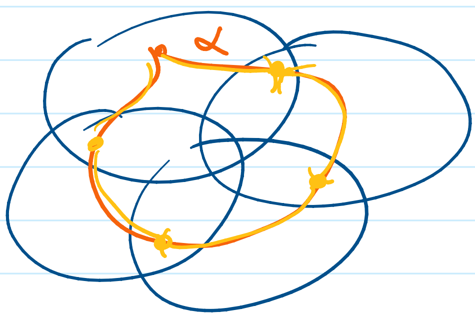
Se $x_1 \in B$, allora $d(x_0, x_1) < \delta$

$\Rightarrow x_1 \notin C_i$ perché $d(x_0, y) \geq \delta$ $\forall y \in C_i$

$\Rightarrow B \cap C_i = \emptyset$ $\boxed{}$

Coroll. Sia X uno spazio topologico e $\alpha: I \to X$ un cammino. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X.
Allora esiste una suddivisione finita $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = 1$ di $[0,1]$ t.c. $\forall i = 0, \dots, k-1$ $\exists U_i \in \mathcal{A}$ t.c. $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$.





$\boxed{\text{Dim}}$ I (con metrica euclidea) è uno spazio metrico cpt

Sia $\tilde{\mathcal{A}} := \{ \alpha^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{A} \}$ ricoprimento aperto di I

Sia δ il numero di Lebesgue del ricoprimento $\tilde{\mathcal{A}}$

$\Rightarrow$ per ogni intervallo J aperto di $[0,1]$ di ampiezza $< \delta$, $\exists U \in \mathcal{A}$ t.c.

di ampiezza $< \delta$, $\exists$ $U \in \mathcal{A}$ t.c.
$J \subseteq \alpha^{-1}(U)$
cioè: $\alpha(J) \subseteq U$.

Scegliamo una partizione $0 = t_0 \leq \dots \leq t_k = 1$ di $[0,1]$ t.c. $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ $\forall i$

$\Rightarrow$ $\exists$ $\varepsilon > 0$ t.c. $|(t_{i+1}+\varepsilon) - (t_i - \varepsilon)| < \delta$ $\forall i$

$\Rightarrow$ $(t_i - \varepsilon, t_{i+1}+\varepsilon)$ ha ampiezza $< \delta$

$\Rightarrow$ $\exists$ $U_i \in \mathcal{A}$ t.c. $\alpha(t_i - \varepsilon, t_{i+1}+\varepsilon) \subseteq U_i$

$$\begin{array}{c} \alpha(t_i - \varepsilon, t_{i+1}+\varepsilon) \\ \cup\!\shortmid \\ \alpha([t_i, t_{i+1}]) \end{array}$$

<u>OSS</u> Se G è un gruppo e S è un suo sottoinsieme, diciamo che S GENERA G se ogni elemento di G si può scrivere come prodotto finito di elementi di S o di loro inversi.

<u>Ricordiamo:</u> Se X è uno spazio top.
$A \subseteq X$ sottospazio
$x_0 \in A$
$i: A \hookrightarrow X$ induce

$$i_*: \pi(A, x_0) \longrightarrow \pi(X, x_0)$$
$$[\alpha] \longmapsto [i \circ \alpha]$$

$$G_A := \operatorname{Im} i_* \underset{\text{sottogruppo}}{\subseteq} \pi(X, x_0)$$

$\downarrow$
classi in $\pi(X, x_0)$ che hanno un rappresentante a valori in A.

<u>Teorema</u> (di Van Kampen sui generatori)
(M., teorema 11.25)

(Th., teorema 11.23)

Sia X uno spazio topologico e $A, B \subseteq X$ aperti t.c.

$$\left.\begin{array}{l} X = A \cup B \\ A, B \text{ c.p.a.} \\ A \cap B \neq \emptyset,\ A \cap B \text{ c.p.a.} \end{array}\right\} \Rightarrow X \text{ c.p.a.}$$

Sia $x_0 \in A \cap B$ e siano $G_A, G_B \subseteq \pi(X, x_0)$ le immagini di $\pi(A, x_0)$ e di $\pi(B, x_0)$ tramite gli omomorfismi indotti dalle inclusioni.

Allora $\pi(X, x_0)$ è generato da $G_A \cup G_B$.

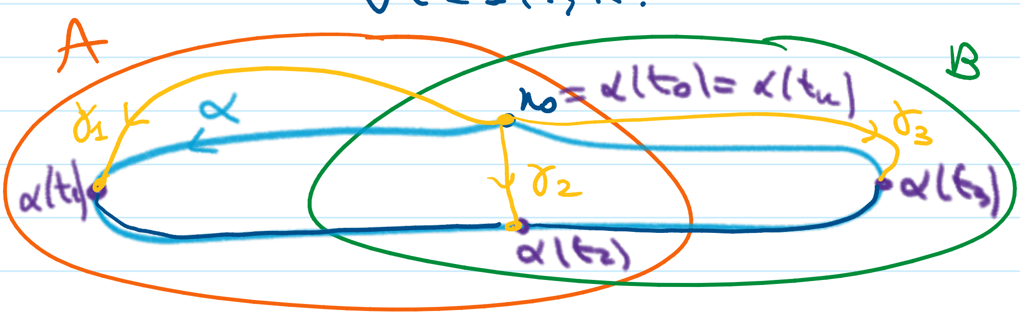
$\boxed{\text{DIM.}}$ Sia $[\alpha] \in \pi(X, x_0)$. Vogliamo mostrare che $[\alpha]$ si può scrivere come prodotto finito di elementi in $G_A \cup G_B$ cioè di classi di cappi con punto base x_0 e interamente contenuti in A o in B.

$\{A, B\}$ ricoprimento aperto di X

$$\alpha : I \to X$$

Dal Corollario: $\exists$ una partizione $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ di $[0,1]$

t.c. $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subseteq \begin{cases} A \\ B \end{cases}$ $\forall i = 1, .., k$.



Sia $\alpha_i := \alpha_{|[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to X$ $\forall i = 1, .., k$

$\forall i = 1 .., k$

A meno di riparametrizzazione possiamo supporre

$$\alpha_i : [0,1] \longrightarrow X$$

$\rightsquigarrow$ α_i è un cammino in X a valori in $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$

Dal lemma del camb. di parametro:

$$\alpha \sim ((\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3) \cdots) * \alpha_k$$

$A, B, A \cap B$ sono c.p.a. $\Rightarrow$ $\forall i = 1 .., k-1$ scegliamo:

se $\alpha(t_i) \in A \cap B$: un arco $\gamma_i : I \to A \cap B$ da x_0 a $\alpha(t_i)$

se $\alpha(t_i) \in A \setminus B$: un arco $\gamma_i : I \to A$ da x_0 a $\alpha(t_i)$

se $\alpha(t_i) \in B \setminus A$: un arco $\gamma_i : I \to B$ da x_0 a $\alpha(t_i)$

Poniamo:

$$\beta_1 := \alpha_1 * \overline{\gamma_1}$$

$\forall i = 2, .., k-1$ $\quad \beta_i := (\gamma_{i-1} * \alpha_i) * \overline{\gamma_i}$

$$\beta_k := \gamma_{k-1} * \alpha_k .$$

Ogni β_i è ben definito ed è un cammino chiuso con pto base x_0.

$$\rightsquigarrow [\beta_i] \in \pi(X, x_0).$$

Verifichiamo che $\operatorname{Im} \beta_i \subseteq \begin{cases} A \\ B \end{cases}$

Fissiamo i, allora

$$\operatorname{Im} \alpha_i \subseteq \begin{cases} A \\ B \end{cases}$$

$\mathrm{Im}\, \alpha_i \subseteq \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$

Se $\mathrm{Im}\, \alpha_i \subseteq A$: allora $\left.\begin{matrix} \alpha_i(0) = \alpha(t_{i-1}) \\ \text{e} \quad \alpha_i(1) = \alpha(t_i) \end{matrix}\right\} \in A$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, \gamma_{i-1}, \mathrm{Im}\, \gamma_i \subseteq A$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, \beta_i = \mathrm{Im}\, \gamma_{i-1} \cup \mathrm{Im}\, \alpha_i \cup \mathrm{Im}\, \gamma_i \subseteq A. \Rightarrow [\beta_i] \in G_A$

Allo stesso modo: se $\mathrm{Im}\, \alpha_i \subseteq B$, allora $\mathrm{Im}\, \beta_i \subseteq B$.
$\Rightarrow [\beta_i] \in G_B$.

$$[\beta_1] \cdots [\beta_k] = [\beta_1 * \cdots * \beta_k]$$

$$= [\alpha_1 * \underbrace{\bar{\gamma}_1 * \gamma_1}_{C_{\alpha(t_1)}} * \alpha_2 * \bar{\gamma}_2 * \cdots \quad \cdots * \gamma_{k-1} * \alpha_k]$$

$$= [\alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_k] = [\alpha].$$

Coroll. Sia X uno spazio topologico e siano $A, B \subseteq X$ aperti t.c.:

1) $X = A \cup B$
2) A e B sono semplicemente connessi
3) $A \cap B \neq \emptyset$ e $A \cap B$ è c.p.a.

Allora X è semplicemente connesso.

$\boxed{\text{DIM}}$ Osserviamo anzitutto che X è c.p.a.

Dal teorema di Van Kampen, se $x_0 \in A \cap B$, $\pi(X, x_0)$ è generato da $G_A \cup G_B$.

$\pi(X, x_0)$ è generato da $G_A \cup G_B$.

Però: $\pi(A, x_0) = \{1\} \Rightarrow G_A = \{1\}$

$\pi(B, x_0) = \{1\} \Rightarrow G_B = \{1\}$

$\Rightarrow \pi(X, x_0)$ è generato da $\{1\}$

$\Rightarrow \pi(X, x_0) = \{1\}$. ■

Coroll. $\forall\, n \geq 2$ la sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è semplicemente connessa.

DIM. Consideriamo

$N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ polo nord

$S = (0, \dots, 0, -1) \in S^n$ polo sud

$A := S^n \setminus \{N\}$
$B := S^n \setminus \{S\}$ aperti di S^n

Ricordiamo che $S^n \setminus \{1 \text{ pto}\}$ è omeomorfa a $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ è contraibile

$\Rightarrow A$ e B sono semplicemente connessi.

Inoltre: $A \cap B \neq \emptyset$ (se $n \geq 1$)

e $A \cap B = S^n \setminus \{2 \text{ pti}\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{1 \text{ pto}\}$

$n \geq 2 \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{1 \text{ pto}\}$ è c.p.a.

$\Rightarrow A \cap B$ è c.p.a.

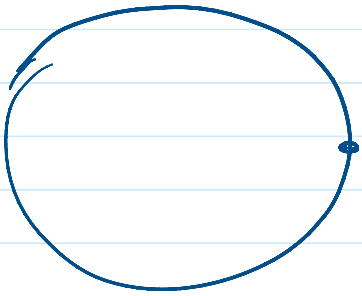
$\Rightarrow S^n$ è semplicemente connessa.

OSS $\forall\, n \geq 2$ S^n è semplicemente connessa, ma <u>non è</u> contraibile.

— ma non è contraibile.

Gruppo fondamentale di S^1.

Vogliamo vedere che $\pi(S^1, p_0) \cong \mathbb{Z}$.



$p_0 = (1,0)$

$\pi(S^1, p_0) \ni [\alpha]$

$\updownarrow$

$n \in \mathbb{Z}$

n = "numero di giri" fatti da α attorno alla circonferenza (positivi in senso antiorario, negativi in senso orario)

Per formalizzare il "numero di giri", usiamo la mappa esponenziale,

$$e : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$$

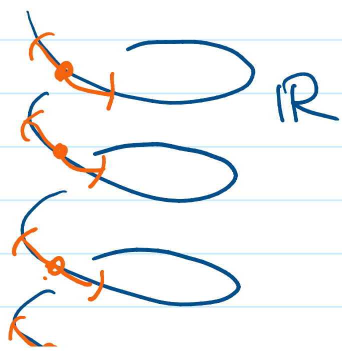
$$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

$$S^1 \subset \mathbb{C} \quad = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

$$t \longmapsto \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) = e^{2\pi i t}$$

e è il quoziente di $\mathbb{R}$ per l'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ per traslazioni

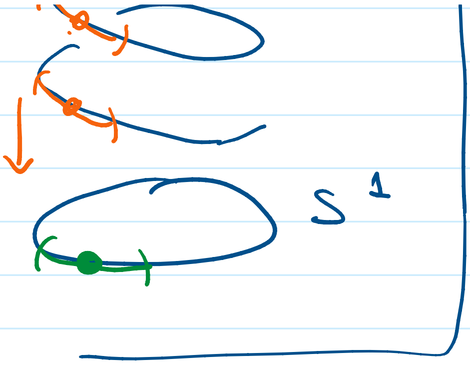
$\rightarrow$ e è un'identificazione, è continua, suriettiva, e aperta



Lemma. Sia $U \subsetneq S^1$ un aperto.

Allora

unione disgiunta



Allora

unione disgiunta

$$e^{-1}(U) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} V_n$$

con: V_n aperto di $\mathbb{R}$

e

$e_{|V_n} : V_n \to U$ è omeomorfismo.

Diciamo che U è un aperto UNIFORMEMENTE RIVESTITO.

$\boxed{\text{DIM}}$ Supponiamo $1 \notin U$ $\quad S^1 \subset \mathbb{C}$

$$e^{-1}(1) = \mathbb{Z} = \{t \mid \cos 2\pi t = 1\}$$

$$\Rightarrow e^{-1}(U) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$$

Poniamo $V_0 := e^{-1}(U) \cap (0,1)$

$= e^{-1}(U) \cap [0,1]$

- V_0 è aperto in $\mathbb{R}$
- $e_{|V_0}$ è iniettiva (e è iniettiva su $[0,1)$)
- $e(V_0) = U$

$e_{|V_0} : V_0 \to U$

è continua, aperta,

e biunivoca

$\Rightarrow$ è omeomorfismo.

Poniamo: $V_n := V_0 + n = e^{-1}(U) \cap (n, n+1)$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

Allora:
- $e^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n$
- $V_n \cap V_m = \emptyset$ se $n \neq m$

. $\forall n \quad e_{|V_n}: V_n \to U$ è omeomorfismo.

<u>Sollevamenti:</u>

Sia α un cammino in S^1.

<u>Def</u> Un SOLLEVAMENTO di α è un cammino
$$\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}$$
t.c. $\alpha = e \circ \tilde{\alpha}$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "e"] \\ I \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\alpha}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Allora $\forall t \in I$:
$$e(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t) \in S^1$$
$$\| $$
$$e^{2\pi i \tilde{\alpha}(t)} = \cos(2\pi\tilde{\alpha}(t)) + i \sin(2\pi\tilde{\alpha}(t))$$

$\Rightarrow$ $2\pi\tilde{\alpha}(t)$ è una determinazione dell'angolo per $\alpha(t) \in S^1$

$\Rightarrow$ $2\pi\tilde{\alpha}$ è una determinazione <u>CONTINUA</u> dell'angolo per α.

<u>Es</u> Sia $n \in \mathbb{Z}$ e consideriamo
$$\gamma: I \to S^1$$
dato da: $\gamma(t) = e^{2\pi i n t}$.

. γ è un cammino in S^1
. $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ $\Rightarrow$ γ è un cappio con pto base 1.

Un sollevamento di γ è:
$$\tilde{\gamma}(t) = nt \qquad \tilde{\gamma}: I \to \mathbb{R}$$
$$e(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t).$$

<u>Teorema:</u> (sollevamento di cammini).

Teorema: (sollevamento di cammini).

Ogni cammino $\alpha : I \to S^1$ ammette un sollevamento $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$.

Inoltre: fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $e(x_0) = \alpha(0) \in S^1$
(cioè: $x_0 \in e^{-1}(\alpha(0))$)

$\exists!\ \tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ sollevamento di α A PARTIRE DA x_0,

cioè t.c. $\tilde{\alpha}(0) = x_0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ (Esistenza).

$\forall p \in S^1$ sia U_p intorno aperto di p in S^1 che sia connesso e uniformemente rivestito
$(U_p \subsetneq S^1)$

$\{U_p\}_{p \in S^1}$ ricoprimento aperto di S^1

$\alpha : I \to S^1$

Allora esiste una partizione finita

$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = 1$ di $[0,1]$

t.c. $\forall i = 1, \dots, k$ $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subseteq \underline{U_i}$
aperto del ricoprimento

Costruiamo il sollevamento $\tilde{\alpha}$ "a pezzi" ricorsivamente su $[0, t_i]$.

$\tilde{\alpha}(0) = x_0$ assegnato

Costruiamo $\tilde{\alpha}$ su $[0, t_1]$

$\alpha([0, t_1]) \subseteq U_1$ uniformemente rivestito

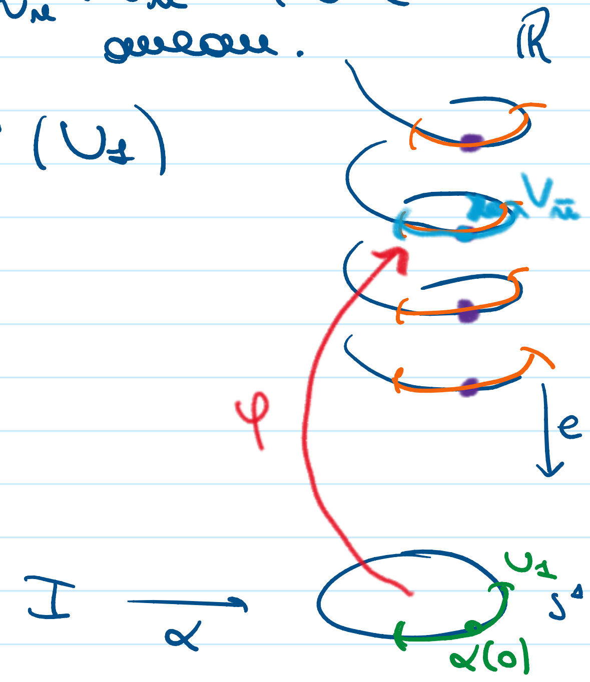
$e^{-1}(U_1) = \coprod_{m \in \mathbb{Z}} V_m$

V_m aperto in $\mathbb{R}$

$$e^{-1}(U_1) = \coprod_{m\in\mathbb{Z}} V_m$$

V_n aperto in $\mathbb{R}$, $e_{|V_n}: V_n \to U$ è omeom.

In particolare: $\alpha(0) \in U_1$



$\Rightarrow x_0 \in e^{-1}(\alpha(0)) \subset e^{-1}(U_1)$

$\Rightarrow \exists\, \bar{n}$ t.c. $x_0 \in V_{\bar{n}}$.

$e_{|V_{\bar{n}}}: V_{\bar{n}} \to U$ è omeo

$\Rightarrow \exists\, \varphi := (e_{|V_{\bar{n}}})^{-1}: U \to V_{\bar{n}}$

Poniamo

$\tilde{\alpha}_1 := \varphi \circ \alpha_{|[0,t_1]}$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}_1 : [0,t_1] \to \mathbb{R}$ continua, solleva $\alpha_{|[0,t_1]}$.

Supponiamo di aver definito

$\tilde{\alpha}_i : [0,t_i] \to \mathbb{R}$ continua

che solleva $\alpha_{|[0,t_i]}$

$\alpha((t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_{i+1}$ uniform. rivestito

$\Rightarrow e^{-1}(U_{i+1}) = \coprod_{m\in\mathbb{Z}} W_m$ $\quad W_m$ aperti in $\mathbb{R}$

$\tilde{\alpha}_i(t_i) \in \mathbb{R}$

$e(\tilde{\alpha}_i(t_i)) = \alpha(t_i) \in U_{i+1}$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}_i(t_i) \in e^{-1}(U_{i+1})$

$\Rightarrow \exists!\, \bar{m} \in \mathbb{Z}$ t.c. $\tilde{\alpha}_i(t_i) \in W_{\bar{m}}$

$e_{|W_{\bar{m}}}: W_{\bar{m}} \to U$ è omeo

$e|_{W_{\bar m}} : W_{\bar m} \to U$ è omeo

$\rightsquigarrow$ Sia $\psi := (e|_{W_{\bar m}})^{-1} : U \to W_{\bar m}$ continua

Definiamo

$$\tilde{\alpha}_{i+1} : [0, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$$

come:

$$\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i(t) & t \in [0, t_i] \\ \psi \circ \alpha(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

· continua per il lemma di incollamento

sollevamento $\alpha|_{[0, t_{i+1}]}$

$\rightsquigarrow$ in un numero finito di passi costruiamo il sollev. su tutto $[0, 1]$.