

## Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

### Foglio di esercizi n. 10 – a.a. 2022-23

Da consegnare mercoledì 14 dicembre

**Esercizio 1.** Per ognuna delle seguenti sequenze, determinare il tipo di omeomorfismo della superficie corrispondente. Per la seconda e l'ultima sequenza, applicare esplicitamente l'algoritmo del taglia & incolla per classificare la superficie.

1.  $abcacb$
2.  $abcb^{-1}dec^{-1}aed$
3.  $abcc^{-1}def f^{-1}e^{-1}d^{-1}b^{-1}a^{-1}$
4.  $aed^{-1}e^{-1}bcadcb$
5.  $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$
6.  $abcd a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$

**Esercizio 2.** Il libro XIII degli *Elementi* di Euclide (l'ultimo libro dell'opera) è dedicato alla costruzione dei 5 solidi platonici: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro e alla dimostrazione del fatto che sono gli unici poliedri regolari (cioè tutte le facce sono poligoni regolari uguali fra loro, da ogni vertice parte lo stesso numero di spigoli e gli angoli solidi sono tutti uguali fra loro).

Dimostrare, usando il fatto che un poliedro regolare è una suddivisione della sfera e la caratteristica di Eulero, che queste sono le uniche 5 possibilità.

Notare che questa dimostrazione non dà l'*esistenza*. Costruire il tetraedro, il cubo e l'ottaedro è semplice, ma costruire il dodecaedro e l'icosaedro è meno immediato (ma non è richiesto per quest'esercizio).

**Esercizio 3.** Per ogni *triangolazione* (cioè tutte le facce sono *triangoli*) di una superficie compatta connessa  $X$  con  $f$  facce,  $s$  spigoli e  $v$  vertici, dimostrare che

$$\begin{aligned}3f &= 2s \\s &= 3(v - \chi) \\v &\geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2}\end{aligned}$$

dove  $\chi$  è la caratteristica di Eulero di  $X$ :  $\chi = f - s + v$ . Suggerimento per l'ultima disuguaglianza: osservare che il numero  $s$  di spigoli è minore o uguale al numero delle coppie di vertici.

**Esercizio 4.** Nel piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , con coordinate omogenee  $(x : y : z)$ , consideriamo i punti  $A = (1 : 3 : 0)$  e  $B = (2 : -1 : 5)$ . Determinare l'equazione della retta passante per i punti  $A$  e  $B$ .