Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Foglio di esercizi n. 11 – a.a. 2022-23

Da consegnare mercoledì 21 dicembre

Esercizio 1. Consideriamo il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e i punti dati, in un sistema di riferimento proiettivo, dalle coordinate omogenee $A = [1 : 0 : 0]$, $B := [1 : 2 : 1]$, $C := [1 : -1 : -1]$ e $D := [1 : 1 : 0]$. Dimostrare che i punti dati sono in posizione generale o spiegare perché non lo sono.

Esercizio 2. *(Es. 5 dallo scritto di settembre 2018.)* Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, con coordinate omogenee $(x_0 : \cdots : x_3)$, si considerino il sottospazio proiettivo S generato dai punti $(1 : 0 : 3 : 2), (3 : 0 : -1 : 0)$, e il sottospazio proiettivo T di equazioni $x_0 - 2x_1 + x_3 = 2x_0 + ax_1 + 2x_3 = 0$, dove a è un parametro reale.

(1) Determinare, al variare di a, le dimensioni di S, T, $S \cap T$, e $S + T$ (il sottospazio proiettivo generato da $S \cup T$).

(2) Posto $a \neq -4$, determinare delle equazioni per $S + T$.

Esercizio 3. Determinare la proiettività f di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f((1 : 1)) = (1 : -1), \quad f((2 : 0)) = (1 : 1), \quad f((1 : -1)) = (2 : 1).$$

Esercizio 4. *(es. 5 dallo scritto di giugno 2019)* Consideriamo i seguenti punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$p_1 = (1 : \sqrt{3} : 0), \quad p_2 = (-\frac{1}{2} : \frac{5}{3} : \sqrt{2}), \quad p_3 = (0 : -7 : 1),$$
$$q_1 = (2 : \frac{1}{3} : 0), \quad q_2 = (6 : -1 : 1), \quad q_3 = (0 : 1 : a)$$

dove $a \in \mathbb{R}$.

1. Dire per quali valori di a esiste una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $F(p_i) = q_i$ per $i = 1, 2, 3$;
2. per tali valori di a, dire se F è unica.

Esercizio 5. *(Es. 6 dallo scritto di giugno 2017.)* Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sia π il piano per $P_1 = [1 : 1 : 0 : 0 : 1]$, $P_2 = [0 : -1 : 0 : 1 : 1]$, $P_3 = [1 : 0 : 1 : 0 : 0]$, e sia r la retta per $Q_1 = [t : 0 : 1 : 1 : 2]$, $Q_2 = [0 : t : -1 : -1 : 0]$, dove t è un parametro reale.

Determinare, al variare di t, la posizione reciproca di π e r.

Esercizio 6. Gli spazi proiettivi reali $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e quelli complessi $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ hanno la topologia quoziente data dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ rispettivamente.

Sia $f\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ o $f\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ una proiettività. Dimostrare che f è un omeomorfismo.

Esercizio 7. Sia $U_0 = \{(x_0 : \cdots : x_n) \mid x_0 \neq 0\}$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, e sia $j\colon \mathbb{R}^n \to U_0$ l'identificazione naturale. Mostrare che U_0 è un aperto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e che j è omeomorfismo. Fare lo stesso per $j\colon \mathbb{C}^n \to U_0 \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Esercizio 8. Scrivere un esempio di proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che non abbia punti fissi.