Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 10 - 12 dicembre 2022

Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ i punti

$$P_1 = [1 : 0 : 1 : 2] \quad P_2 = [1 : 1 : 1 : 2] \quad P_3 = [0 : 1 : 0 : 0] \quad P_4 = [2 : 1 : 2 : 4]$$

1. Si dica se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.
2. Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da P_1, P_2, P_3, P_4 e se ne determinino equazioni parametriche.
3. Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ si considerino i punti

$$P_1 = [1 : 1 : 0 : 0], \quad P_2 = [-1 : 0 : 0 : 1], \quad P_3 = [0 : 0 : 2 : 0]$$

$$Q_1 = [0 : t : 2 : 1], \quad Q_2 = [t : 1 : 2 : 0], \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Calcolare le dimensioni del sottospazio π generato dai punti P_1, P_2, P_3 e del sottospazio r generato dai punti Q_1, Q_2.
2. Determinare, al variare di t, la posizione reciproca di π e r.

Esercizio 3. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino i punti:

$$P_1 = [1 : 0 : 0] \quad P_2 = [2 : 1 : -1] \quad P_3 = [0 : -1 : 1] \ \text{ e}$$

$$Q_1 = [1 : 0 : 1] \quad Q_2 = [2 : 1 : 0] \quad Q_3 = [1 : 1 : -1].$$

1. Si verifichi che i tre punti P_i sono allineati e che i tre punti Q_i sono allineati.
2. Trovare, se esiste, una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $F(P_i) = Q_i$ per $i = 1, 2, 3$.

Esercizio 4. Determinare una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che

$$f([1 : 2 : 1]) = [1 : 0 : 0] \quad \text{e} \quad f(r) = r', f(s) = s',$$

dove le rette sono date dalle equazioni:

$$r : x_0 - x_1 = 0, \ r' : x_0 + x_1 = 0, \ s : x_0 + x_1 + x_2 = 0, \ s' : x_1 + x_2 = 0.$$

Esercizio 5. Determinare una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che

$$f([1 : 0 : 0]) = [1 : 1 : 0], \quad f([1 : 1 : -1]) = [0 : 2 : -1]), \quad f([0 : 0 : 1]) = [0 : 0 : 1]$$

e dire se è unica. Verificare che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

determina una proiettività con le proprietà richieste e trovarne i punti fissi. Ha rette di punti fissi?

Esercizio 6. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con coordinate (x, y) e la sua chiusura proiettiva con le coordinate $(x_0 : x_1 : x_2)$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la simmetria rispetto all'asse y. Si estenda f a una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e se ne trovino i punti fissi. Ci sono rette fisse per F in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?