

Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Foglio di esercizi n. 12 – a.a. 2022-23

Da consegnare mercoledì 11 gennaio

**Esercizio 1.** Sia  $f: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  la proiettività data da

$$f(x_0 : x_1) = (x_0 - x_1 : 2x_0 + 4x_1).$$

1. Determinare i punti fissi di  $f$ .
2. Detti  $A$  e  $B$  i punti fissi e  $Q = (1 : 1)$ , calcolare il birapporto  $\beta(A, B, Q, f(Q))$ .

**Esercizio 2.**

1. Siano  $r$  e  $s$  due rette nel piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  e sia  $g: r \rightarrow s$  una trasformazione proiettiva. Siano poi  $P, Q \in \mathbb{P}^2$  due punti tali che  $P \notin r$  e  $Q \notin s$ . Mostrare che esiste una proiettività  $f$  di  $\mathbb{P}^2$  che estende  $g$  e tale che  $f(P) = Q$ .
2. Siano  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  due quaterne di punti distinti in  $\mathbb{P}^2$ , tali che  $P_1, P_2, P_3$  giacciono su una retta  $r$ ,  $P_4 \notin r$ ,  $Q_1, Q_2, Q_3$  giacciono su una retta  $s$ , e  $Q_4 \notin s$ . Mostrare che esiste una proiettività  $f$  di  $\mathbb{P}^2$  tale che  $f(P_i) = Q_i$  per ogni  $i = 1, 2, 3, 4$ .

**Esercizio 3.** Determinare la forma canonica della conica proiettiva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  di equazione  $x_0^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 0$ .

**Esercizio 4.** Determinare i punti impropri e le chiusure proiettive delle seguenti curve in  $\mathbb{C}^2$ :

$$x + 2y^2 - 1 = 0, \quad 3y + xy + xy^2 = 0, \quad x^2y^2 - 1 = 0.$$

**Esercizio 5.** Consideriamo il piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , con coordinate omogenee  $(x_0 : x_1 : x_2)$ . Siano  $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  una retta proiettiva, e  $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  la conica di equazione  $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ .

1.  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus L$  è connesso?
2.  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus C$  è connesso?

Giustificare le risposte.

**Esercizio 6.** Determinare i punti impropri e le chiusure proiettive delle seguenti rette in  $\mathbb{C}^2$ :

$$3x + y + 1 = 0, \quad x + i = 0, \quad y + 6 = 0.$$