Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 11 - 20 Dicembre 2022

Esercizio 1. Dire se esiste una proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che mandi ordinatamente i punti $A = (2 : 1)$, $B = (1 : 0)$, $C = (0 : 1)$, $D = (1 : 1)$ nei punti A', B', C', D' dati da:

1. $A' = C$, $B' = A$, $C' = B$, $D' = D$;
2. $A' = D$, $B' = C$, $C' = B$, $D' = A$;
3. $A' = (1 : 2)$, $B' = (-1 : 1)$, $C' = (4 : 1)$, $D' = B$.

In caso affermativo, scrivere le equazioni di tale proiettività.

Esercizio 2. Si considerino in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ in seguenti punti

$$A = [-2 : 0 : -\frac{1}{2} : 3], \quad B = [\frac{1}{2} : 1 : 3 : 2], \quad C = [\frac{1}{6} : 3 : \frac{26}{3} : 8].$$

Verificare che appartengono tutti a una stessa retta proiettiva r e determinare il punto $P \in r$ tale che il birapporto $\beta(A, B, C, P) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3. Consideriamo il seguente fascio di coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$(\lambda - \mu)x^2 - \lambda y^2 + 4(\mu - \lambda)xz + (4\lambda - \mu)yz = 0.$$

1. Determinare i punti base e le coniche degeneri del fascio.
2. Determinare le coniche del fascio tangenti a $x = 0$.

Esercizio 4. Date le coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$\mathcal{C}_1 : 4x_0x_1 + 6x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0 \qquad \mathcal{C}_2 : x_0^2 + 2x_1^2 + hx_2^2 = 0,$$

determinare $h \in \mathbb{C}$ tale che $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ siano proiettivamente equivalenti. Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ sono proiettivamente equivalenti come coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?

Esercizio 5. Date le coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$\mathcal{C} : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \qquad \mathcal{D} : x_1x_2 = 0,$$

determinare

1. la conica del fascio generato da $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ passante per il punto $[1 : 1 : 1]$;
2. i punti base del fascio.

Esercizio 6. Date le cubiche (curve di ordine 3) di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ di equazione:

$$\mathcal{C}_1 : \; x^3 + 2xy - 5x + 1 = 0, \quad \mathcal{C}_2 : \; 2x^2y + xy^2 + x + 3 = 0,$$

determinarne

1. la chiusura proiettiva,
2. i punti impropri,
3. i punti singolari,
4. la retta tangente a $\mathcal{C}_1$ nel punto $P_1 = (1, 3/2)$ e a $\mathcal{C}_2$ nel punto $P_2 = (-1, 1 + \sqrt{3})$.