Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Foglio di esercizi n. 13 – a.a. 2022-23

Da consegnare mercoledì 11 gennaio

Esercizio 1. Si scriva l'equazione della conica del piano proiettivo reale passante per i punti:

$$(1:0:1),\ (-1:0:0),\ (0:1:1),\ (0:-1:0),\ (1:3:2).$$

Esercizio 2. *(es. 5 dallo scritto di gennaio 2019)* Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ consideriamo i punti $P_1 = [0:1:0]$ e $P_2 = [0:0:1]$ e le rette $r_1 : x_0 - x_2 = 0$ e $r_2 : 2x_0 - x_1 = 0$. Si mostri che l'insieme

$$\mathcal{F} = \{\text{coniche } C \text{ tangenti a } r_i \text{ in } P_i, i = 1,2\}$$

è un fascio, e determinarne i punti base e le coniche degeneri.

Esercizio 3. *(es. 5 dallo scritto di febbraio 2019)* Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, contenente almeno una conica non degenere. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere, giustificando la risposta:

A: $\mathcal{F}$ contiene almeno una conica degenere.
B: $\mathcal{F}$ può contenere 4 coniche degeneri.
C: $\mathcal{F}$ può contenere infinite coniche degeneri.

Esercizio 4. Consideriamo 5 punti nel piano proiettivo, a 4 a 4 non allineati, e sia C l'unica conica che li contiene. Mostrare che C è non degenere se e solo se i 5 punti sono in posizione generale.

Esercizio 5. Sia C una curva piana (affine o proiettiva), di equazione $F = 0$. Ricordiamo che se $F = F_1^{m_1} \cdots F_r^{m_r}$ è la fattorizzazione di F come prodotto di irriducibili, le curve C_i di equazione $F_i = 0$ si dicono componenti irriducibili di C, di molteplicità m_i.

Sia $P \in C$ un punto che appartiene ad almeno due componenti irriducibili di C, oppure ad una componente irriducibile di C di molteplicità $m > 1$. Mostrare che P è singolare per C.

Esercizio 6. In questo esercizio tutte le matrici considerate sono matrici quadrate complesse. Useremo le seguenti notazioni: per un autovalore λ della matrice A indichiamo con

1. max-dim(λ) = dimensione massima di un blocco di autovalore λ
2. molt-alg(λ) = molteplicità algebrica dell'autovalore λ
3. molt-geom(λ) = molteplicità geometrica dell'autovalore λ
4. $c_A(t)$ = polinomio caratteristico della matrice A
5. $m_A(t)$ = polinomio minimo della matrice A

Per ognuna delle seguenti condizioni, determinare tutte le possibili forme di Jordan che rispettano le informazioni date.

1. A di ordine 6, molt-alg(8) $= 6$, molt-geom(8) ≤ 3, max-dim(8) $= 3$
2. $c_A(t) = (t-2)^5(t-3)^4$, molt-geom(2) $= 3$, max-dim(3) $= 2$
3. A di ordine 8, molt-alg(5) $= 8$, molt-geom(5) ≤ 4, max-dim(5) $= 4$
4. $c_A(t) = (t-1)^4(t-2)^4$, A ha 4 autovettori linearmente indipendenti
5. $\deg c_A(t) = 6$, A ha 2 autovalori distinti e 4 autovettori linearmente indipendenti
6. $c_A(t) = (t-1)^3(t-3)^5$, A ha 3 autovettori linearmente indipendenti
7. molt-alg(5) $= 8$, molt-geom(5) ≤ 5, max-dim(5) $= 3$
8. molt-alg(3) $= 6$, molt-geom(3) ≤ 4, max-dim(3) $= 2$
9. molt-alg(5) $= 4$, molt-geom(5) ≤ 2, max-dim(5) $= 2$

Esercizio 7. Sia A una matrice quadrata complessa di ordine n tale che $A^2 = A$ (per esempio, $A =$ matrice identità oppure $A =$ matrice nulla).

a. Scrivere un esempio esplicito per $n = 3$ diverso dalla matrice identità e dalla matrice nulla.

b. Per n qualunque, dimostrare che gli autovalori possibili di A sono 0 e 1 e trovare tutti i possibili polinomi minimi.