

Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 12 - 11 Gennaio 2023

Con le conoscenze acquisite nelle lezioni svolte fino a fine Dicembre, potete svolgere i primi cinque esercizi.

**Esercizio 1.** Data la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

trovarne la forma di Jordan e una base rispetto alla quale la matrice ha tale forma.

**Esercizio 2.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sapendo che il suo polinomio caratteristico è  $c(t) = (1 - t)^4$ , determinare una matrice  $J$  in forma canonica di Jordan e una base rispetto alla quale  $A$  ha tale forma  $J$ .

**Esercizio 3.** Sia  $A$  una matrice complessa con polinomio caratteristico  $c(t) = (t-3)^2(t-4)^3$ . Determinare le possibili forme canoniche di Jordan e per ciascuna di esse indicare il corrispondente polinomio minimo.

**Esercizio 4.** Trovare la forma di Jordan della seguente matrice a coefficienti complessi al variare del parametro  $h \in \mathbb{C}$ :

$$A = \begin{pmatrix} h & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & h-2 & h-1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.** Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinare la forma di Jordan  $J$  di  $A$  e una base rispetto alla quale  $A$  si scrive in tale forma.

**Esercizio 6.** Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Dire se  $A$  e  $B$  sono simultaneamente diagonalizzabili.
2. Se si, trovare una base comune che le diagonalizza entrambe.

**Esercizio 7.** Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & -10 & -12 & -4 \\ -4 & 8 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico  $c_A(t) = (t-2)^2(t+2)^2$  e  $c_B(t) = t(t+1)^3$  rispettivamente. Le matrici commutano (non si deve verificare l'affermazione). Dire se sono simultaneamente diagonalizzabili e, se lo sono, determinare una base che le diagonalizza entrambe.

**Esercizio 8.** Siano  $A$  e  $B$  matrici che commutano e  $A$  sia diagonalizzabile.

1. E' vero che anche  $B$  è diagonalizzabile?
2. Se  $A$  non è multiplo dell'identità è vero che  $B$  è per forza diagonalizzabile?