Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 18 gennaio 2023

Tempo a disposizione: 3 ore

Per gli studenti degli a.a. precedenti aventi l'esame da 9 CFU: esercizi 1–4, tempo 2 ore e mezza; **barrare qua:** ☐

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (6 punti) Si denoti con $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ lo spazio $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea. Si ponga:

$$\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{E} \mid \sin x > 0 \quad \forall x \in U\} \cup \{\mathbb{R}\}$$

1. Verificare che $\mathcal{T}$ è una topologia sull'insieme $\mathbb{R}$.
2. Determinare l'interno e la chiusura di $[0, 1]$ rispetto alla topologia $\mathcal{T}$.
3. Dire se $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathcal{T}$ è compatto.
4. Dire se $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathcal{T}$ è connesso per archi.
5. Dimostrare che la funzione $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ definita da $f(x) = x + 2\pi$ è continua.

Esercizio 2. (7 punti) Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}.$$

1. Determinare dei generatori del gruppo fondamentale $\pi(X)$
2. Dire se la circonferenza $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ è retratto e/o retratto di deformazione di X. Giustificare la risposta.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S una superficie compatta orientabile con caratteristica di Eulero $\chi(S) = -6$. Determinare tutti i modi possibili (a meno di omeomorfismo) di scrivere S come somma connessa di altre superfici, nessuna delle quali sia omeomorfa ad una sfera.

Esercizio 4. (7 punti) Sia data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

di polinomio caratteristico $p(t) = \det(M - tI) = (t^2 - 1)^2$.

1. Determinare una matrice J in forma canonica di Jordan e una base rispetto alla quale M ha tale forma J.

2. Dire se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:

$$(M - I)(M^5 - I) = 0.$$

Esercizio 5. (7 punti) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, con coordinate omogenee $(x : y : z : w)$, si considerino i punti

$$P_1 = (1 : 0 : -1 : 0), \quad P_2 = (0 : 2 : 0 : 0), \quad P_3 = (1 : -1 : 0 : 1)$$

$$S = (1 : 0 : 1 : 2), \quad Q_t = (1 : 1 : 0 : t)$$

dove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1. Scrivere l'equazione (o le equazioni) cartesiane dello sottospazio $W \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ generato dai punti P_1, P_2, P_3 e dire che dimensione ha. Determinare inoltre, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la dimensione del sottospazio $R_t \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ generato dai due punti S e Q_t.

2. Discutere al variare di $t \in \mathbb{R}$ la posizione reciproca di W e R_t.

3. Verificare che i punti $A = (3 : 2 : 1 : 2)$ e $B = (0 : 1 : -1 : -2)$ appartengono al sottospazio R_0 (generato da S e Q_0), e calcolare il birapporto $\beta(S, Q_0, A, B)$.

4. Dire se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che fissa S e Q_0 e tale che $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ dove $A' = (1 : -1 : 2 : 4)$, $B' = (2 : 1 : 1 : 2)$.