Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 6 febbraio 2023

Tempo a disposizione: 3 ore

Per gli studenti degli a.a. precedenti aventi l'esame da 9 CFU: esercizi 1–4, tempo 2 ore e mezza; **barrare qua:** ☐

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (7 punti) Siano X e Y due spazi topologici e $f, g\colon X \to Y$ due applicazioni continue. Consideriamo i loro grafici Γ_f e Γ_g con la topologia indotta dalla topologia prodotto di $X \times Y$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando le risposte:

(a) Y di Hausdorff $\Rightarrow \Gamma_f$ chiuso in $X \times Y$

(b) Γ_f connesso $\Rightarrow \Gamma_g$ connesso

(c) Γ_f chiuso in $X \times Y \Rightarrow f$ chiusa.

Esercizio 2. (6 punti) In $\mathbb{R}^n$, con la topologia euclidea, si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$X := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \neq 0\}, \qquad Y := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}.$$

1. Mostrare che X è un aperto di $\mathbb{R}^n$, che è sconnesso, e determinarne le componenti connesse.
2. Si consideri la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^n$ definita da:

   $$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y;$$

   mostrare che lo spazio quoziente $\mathbb{R}^n/\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. (6 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza:

$$W = a\,d^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}\,d^{-1}\,b\,a\,c$$

(a) Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

(b) Determinare una superficie compatta e orientabile T tale che $\chi(S\sharp T) = -4$, oppure dimostrare che una tale superficie non esiste.

Esercizio 4. (6 punti) Siano M e N due matrici $n \times n$ a elementi complessi, tali che $M^2 = N^2 = I$ e aventi la stessa traccia. Mostrare che M e N sono simili.

Esercizio 5. (7 punti) Si consideri il seguente fascio di coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$\lambda(x^2 + 2y^2 + 2xy - 4xz) + \mu(x^2 - 2z^2 - 2xz) = 0.$$

Determinare (se esistono):

1. le coniche degeneri del fascio;
2. le coniche del fascio proiettivamente equivalenti alla conica $\mathcal{D} : x^2+y^2 = 0$;
3. le coniche del fascio tangenti alla retta $z = 0$, e per ciascuna di essere indicare i punti in cui la retta $z = 0$ è tangente.