1.2. **La coomologia di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.** Vogliamo ora calcolare la coomologia dello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. E' possibile calcolarla in modo analogo a quanto fatto per $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, ma preferiamo mostrare un altro metodo, che sfrutta la coomologia di S^n e il fatto che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ si puo' descrivere come quoziente di S^n per una relazione di equivalenza $\sim_a$ chiamata "identificazione antipodale". Per ogni n si ha che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = S^n / \sim_a$ dove $\sim_a$ e' la relazione di equivalenza seguente:

$$\text{se } \underline{x}, \underline{y} \in S^n \quad \underline{x} \sim_a \underline{y} \text{ se e solo se } \underline{x} = \pm \underline{y}.$$

Per mostrare questo diffeomorfismo osserviamo che entrambi gli spazi $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ ed $S^n / \sim_a$ parametrizzano le rette per l'origine (e quindi sono uguali fra loro).

Vogliamo quindi mostrare che un punto di $S^n / \sim_a$ corrisponde in modo univoco a una retta di $\mathbb{R}^{n+1}$ che passa per l'origine. Sia r una retta per l'origine. Essa interseca la sfera in 2 punti. Se uno dei due punti di intersezione e' $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ l'altro (che si trova calcolando la retta per $\underline{x}$ e $\underline{0}$ e poi interscandola con la sfera S^n) ha coordinate $(-x_1, -x_2, \dots, -x_{n+1})$. Quindi i punti associati alla retta r sono $\underline{x}$ e $-\underline{x}$. Ne deduciamo in $S^n / \sim_a$ ogni punto corrisponde a una retta, i punti di $\underline{x}, -\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ corrispondono a un solo punto perche' in $S^n / \sim_a$.

Abbiamo gia' visto che nel caso $n = 1$, lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ parametrizza le rette per l'origine. Questo e' vero anche in dimensione superiore. Infatti se r e' una retta per l'origine e per $\underline{x} = (x_1, \dots x_{n+1})$ allora ogni altro punto $\underline{y} = (y_1, \dots y_{n+1})$ di r e' tale che x_i / y_i e' costante (non dipende da i). Chiamiamo λ il valore costante x_i / y_i,. Per ogni i abbiamo $x_i = \lambda y_i$ e da questa proprieta' deduciamo che i punti $(y_1 : y_2 : \dots : y_{n+1})$ appartenenti alla retta passante per $\underline{0}$ e $\underline{x}$ sono tutti e soli i punti $\underline{y}$ tali che esiste un $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $\underline{y} = \lambda \underline{x}$. Quindi ogni punto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ corrisponde a una retta per l'origine.

Cosi' abbiamo identificato sia $S^n / \sim_a$ sia $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ con lo spazio delle rette in $\mathbb{R}^{n+1}$ che passano per l'origine, quindi abbiamo identificato questi due spazi fra loro.

La funzione $a : S^n \to S^n$, $\underline{x} \mapsto -\underline{x}$ e' un diffeomorfismo e quindi biiettivo. Osserviamo che $a \circ a = id$ (cioe' che il quadrato di a e' l'identita'). Si dice quindi che a ha ordine 2 (la sua seconda potenza e' l'identita').

La funzione a agisce su S^n, e quindi a^* agisce su $\mathcal{E}^k(S^n)$, cioe' a^* agisce sullo spazio delle k-forme differenziabili. Quindi a^* e' un endomorfismo di $\mathcal{E}^k(S^n)$ e ha ordine 2. Di conseguenza a^* "spezza" lo spazio in due autospazi, quello relativo a $+1$ e quello relativo a -1. Per questo motivo esiste una base di $\mathcal{E}^k(S^n)$ fatta di forme che vengono mandate in se' stesse e di forme che vengono mandate nelle loro opposte e possiamo quindi definire gli autospazi

$$\mathcal{E}^k(S^n)_+ = \{\omega \in \mathcal{E}^k(S^n) \text{ tali che } a^*(\omega) = \omega\}$$

$$\mathcal{E}^k(S^n)_- = \{\omega \in \mathcal{E}^k(S^n) \text{ tali che } a^*(\eta) = -\eta\}$$

che sono tali che

$$\mathcal{E}^k(S^n) = \mathcal{E}^k(S^n)_+ \oplus \mathcal{E}^k(S^n)_-.$$

In particolare ogni k-forma ω si scrive cosi':

$$\omega = \frac{(\omega + a^*\omega)}{2} + \frac{(\omega - a^*\omega)}{2}$$

dove il primo addendo e' a^* invariante (cioe' e' contenuto in $\mathcal{E}^k(S^n)_+$) e il secondo e' a^* antiinvariante (cioe' e' contenuto in $\mathcal{E}^k(S^n)_-$).

Questo "spezzamento" dello spazio delle forme, induce un analogo spezzamento anche in coomologia, cioe' a^* agisce anche su $H^k_{DR}(S^n)$ inducendo la deomposizione in autospazi:

$$H^k_{DR}(S^n) = H^k_{DR}(S^n)_+ \oplus H^k_{DR}(S^n)_-,$$

che corrisponde a quella vista per le forme, cioe'

$$[\omega] = \left[\frac{(\omega + a^*\omega)}{2}\right] + \left[\frac{(\omega - a^*\omega)}{2}\right].$$

Inoltre e' definita la mappa quoziente $q : S^n \to S^n/\sim_a$ che associa a ogni punto in S^n la sua classe di equivalenza. Quindi abbiamo $q(\underline{x}) = q(a(\underline{x}))$, cioe' $q = q \circ a$.

La mappa quoziente $q : S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = S^n/\sim_a$ induce

$$q^* : \mathcal{E}^k(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \to \mathcal{E}^k(S^n).$$

Questa mappa passa alla coomologia, quindi si ha la mappa $q^* : H^k(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \to H^k(S^n)$. Inoltre poiche' $q = q \circ a$, si ha $q^* = (q \circ a)^* = a^* \circ q^*$ e quindi $q^*(\mathcal{E}^k(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})) \to \mathcal{E}^k(S^n)_+$.

Se esiste una forma non identicamente nulla su $S^n/\sim_a$, essa necessariamente corrisponde a una forma non nulla su S^n, non puo' essere antiinvariante, altrimenti sarebbe banale se $S^n/\sim_a$. Quindi la mappa q^* e' una mappa iniettiva e si ha

$$\dim(H^k_{DR}(\mathbb{P}^n)) \leq \dim(H^k_{DR}(S^n)_+).$$

In particolare, in tutti i casi in cui possiamo mostrare che $\dim(H^k_{DR}(S^n)_+) = 0$ deduciamo che $H^k_{DR}(\mathbb{P}^n) = \{0\}$.

Poiche' ci sara' anche un caso in cui otterremo $\dim(H^k_{DR}(S^n)_+) \neq 0$ (se $k = n$ ed n e' dispari), in questo caso dovremo sfruttare un risultato piu' forte, cioe' che $q^* : H^n(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \to H^n(S^n)_+$ e' un isomorfismo.

Grazie a questi risultati abbiamo che la conoscenza dell'azione di a^* su S^n determina totalmente la coomologia di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Se $0 < k < n$ si ha $H^k_{DR}(S^n) = \{0\}$, quindi $H^k_{DR}(S^n)_+ = \{0\}$ da cui otteniamo

$$H^k_{DR}(\mathbb{P}^n) = 0 \text{ se } 0 < k < n.$$

Inoltre, poiche' $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ e' una varieta' connessa, si ha $H^0_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$.

Rimane solo da calcolare $H^n_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})$. Per farlo consideriamo prima $H^n(S^n)$ e l'azione di a^* su di esso.

Siccome $H^n_{DR}(S^n) = \mathbb{R}$ questo spazio e' generato da una n forma differenziabile. Come generatore di $H^n(S^n)$ consideriamo la forma orientazione sulla sfera, gia' definita a lezione, cioe'

$$\omega = \sum_i \alpha_i dx_0 \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

dove le funzioni lisce α_i sono $\alpha_i(x) = (-1)^i x_i$.

Calcoliamo l'azione di a^* su questa forma: osservando che $a^*(dx_i) = da(x_i) = -dx_i$ e $a^*(\alpha_i(x)) = (-1)^i a(x_i) = (-1)^{i+1} x_i = -\alpha_i(x)$: otteniamo

$$a^*(\omega) = (-1)^{n+1}\omega,$$

$$a^*(\omega) = (-1)^{n+1}\omega,$$

cioe'

$$a^*(\omega) = \begin{cases} \omega & \text{se } n \text{ e' dispari} \\ (-1)\omega & \text{se } n \text{ e' pari} \end{cases} \quad \text{cioe'} \begin{cases} [\omega] \in H^k_{DR}(S^n)_+ & \text{se } n \text{ e' dispari} \\ [\omega] \in H^k_{DR}(S^n)_- & \text{se } n \text{ e' pari.} \end{cases}$$

Concludiamo che $\dim(H^k_{DR}(S^n)_+)) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ e' dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ e' pari.} \end{cases}$

Abbiamo quindi complessivamente mostrato il seguente risultato.

Proposizione La coomologia di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ dipende dalla parita' di n, in particolare se n e' pari

$$H^k_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) = \begin{cases} \mathbb{R} \text{ se } k = 0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

e se n e' dispari

$$H^k_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) = \begin{cases} \mathbb{R} \text{ se } k = 0, n \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

1.4. **Campi vettoriali sulle sfere.** Lo scopo di questa sezione e' mostrare che non esistono campi vettoriali mai nuli sulle sfere S^n se n e' pari. Il seguente teorema non dice nulla riguardo l'esistenza di tali campi vettoriali se n e' dispari. Tuttavia, in questo caso, abbiamo gia' mostrato l'esistenza di tali campi (esercitazione 3).

Teorema Non esistono campi vettoriali mai nulli sulla sfera n-dimensionale S^n se n e' pari.

Dimostrazione Per assurdo assumiamo che esista un campo vettoriale mai nullo su S^n e lo usiamo per mostrare $(-1)^{n+1} = 1$. Questo porta a un assurdo nel caso n sia pari. Useremo la mappa $a : S^n \to S^n$ e l'azione di a^* su $\omega \in H^n_{DR}(S^n)$ definite nella sezione 1.2.

Sia $y(x)$ il campo vettoriale non nullo su S^n, allora

$$||y(x)|| \neq 0, \quad \forall x \in S^n.$$

A meno di normalizzare $y(x)$, possiamo assumere $||y(x)|| = 1$. Poiche' $y(x) \in T_xS^n$ si ha

$$\langle y(x), x\rangle = 0.$$

Consideriamo la mappa

$$F(x,t) : S^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1} \quad F(x,t) = x\cos(t\pi) + y(x)\sin(t\pi).$$

La funzione F gode delle seguenti proprieta':

- F e' continua;
- $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha

$$||F(x,t)|| = ||x\cos(t\pi)+y(x)\sin(t\pi)|| = ||x||^2\cos^2(t\pi)+||y(x)||^2\sin^2(t\pi)+2\langle x, y(x)\rangle\cos(t\pi)\sin(t\pi)$$

Poiche' $x \in S^n$, $||x|| = 1$, poiche' $y(x) \in T_x S^n$, $\langle x, y(x) \rangle = 0$ e infine $||y(x)|| = 1$ perche' abbiamo normalizzato il campo vettoriale. Cosi' otteniamo

$$||F(x,t)|| = \cos^2(t\pi)^2 + \sin^2(t\pi) = 1.$$

Di conseguenza per ogni $\bar{t}$, $F(x, \bar{t})$ ha norma 1, e quindi e' un punto di S^n. Abbiamo quindi mostrato che il codominio della mappa F e' S^n, cioe' $F : S^n \times \mathbb{R} \to S^n$.

- $F(x, 0) = id_{S^n}$;
- $F(x, 1) = -id_{S^n} = a$.

Grazie alla funzione F si ottiene che id_{S^n} e a sono omotope.

Indichiamo con $F_t : S^n \to S^n$ la funzione $F_t(x) = F(x, t)$. Abbiamo quindi mostrato che $F_0(x) = id_{S^n}$ e $F_1(x) = a$.

La coomologia e' invariante per omotopia e quindi l'azione di F_0^* su $H^n_{DR}(S^n)$ deve conicidere con l'azione di F_1^* su $H^n_{DR}(S^n)$. Quindi abbiamo che

$$id^*_{S^n} = F_0^* = F_1^* = a^*.$$

Consideriamo l'azione di $id^*_{S^n}$ e di a^* sulla forma ω, che e' il generatore di $H^n_{DR}(S^n)$ gia' visto:

$$\omega = id^*_{S^n}(\omega) = F_0^*(\omega) = F_1^*(\omega) = a^*(\omega) = (-1)^{n+1}\omega.$$

Da $\omega = (-1)^{n+1}\omega$ segue $1 = (-1)^{n+1}$, che e' ovviamente assurdo se n e' pari.

L'assurdo dipende dall'esistenza della mappa F che mostra che id_{S^n} e a sono omotope. Per construire tale mappa abbiamo usato il campo vettoriale $y(x)$ mai nullo. Quindi abbiamo mostrato che tale campo vettoriale non puo' esistere se n e' pari.