Teorema di omissione dei tipi

Gerald Sacks once famously remarked: *Any fool can realize a type but it takes a model theorist to omit one*. However, the diagonalization method in the proof of Lemma 12.1 lean towards descriptive set theory. (We invite the interested reader to compare this lemma with the Kuratowski-Ulam theorem.)

Teorema Per ogni L numerabile, N arbitraria, $A \subseteq N$ numerabile, $p(x) \subseteq L(A)$ tipo non-isolato esiste $N' \succeq N$, $A \subseteq M \preceq N'$ che non realizza $p(x)$.

$p(x) \subseteq L(A)$ è isolato su B se esiste $\varphi(x) \in L(B)$ tale che

$\forall N' \succeq N \quad N' \models \forall x\,[\varphi(x) \rightarrow p(x)]$

esercizio $\Downarrow$ $\Uparrow$ ovvio

Per ogni $\psi(x) \in p \quad N \models \forall x\,[\varphi(x) \rightarrow \psi(x)]$

$\varphi(x)$ isola $p(x)$

Criterio di Tarski-Vaught

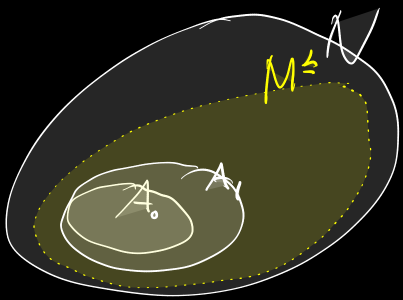
(Perché utile se vogliamo "costruire" $M \preceq N$ dobbiamo ottenere $M \models \varphi \iff N \models \varphi \quad \forall \varphi \in L(M)$)

Sia M un sottoinsieme di N. LSASE

① M è il dominio di una struttura $M \preceq N$

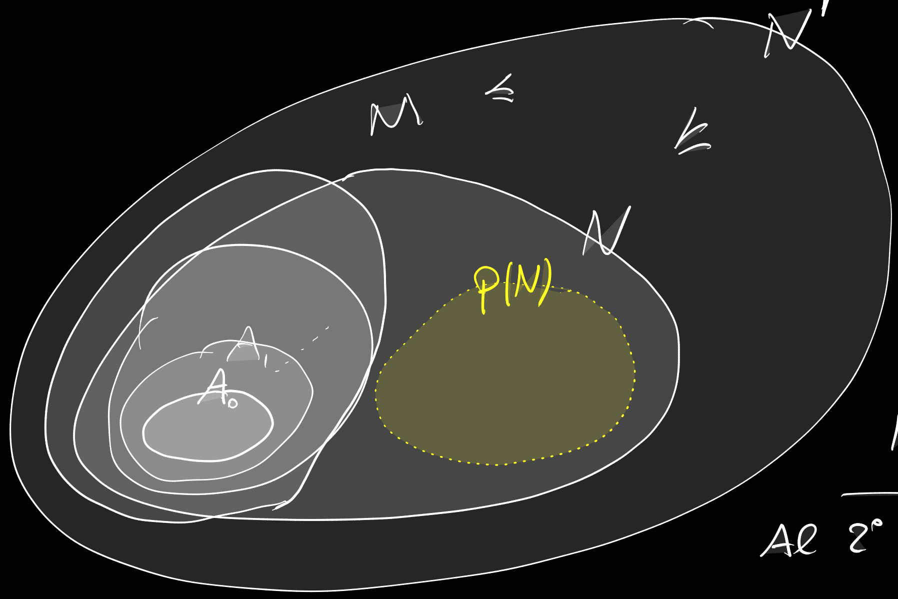
② per ogni $\varphi(x) \in L(M)$ consistente in N $(N \models \exists x\, \varphi(x))$ esiste $a \in M$ t.c. $N \models \varphi(a)$

Costruzione di LS$\downarrow$



enumero le formule di $L(A_i)$ consistenti in N e per ognuna di queste aggiungo ad A_i una soluzione ottengo A_{i+1}

$$M = \bigcup_{i \in \omega} A_i$$



$A = A_0$

vogliamo aggiungere una soluzione di $\psi(x) \in L(A_0)$ scegliendola dalle soluzioni di N' ci riesco?

Sì altrimenti

$N' \models \forall x\,[\psi(x) \to p(x)]$ ↯

Al 2° passo ho problemi

vogliamo aggiungere una soluzione di $\psi'(x) \in L(A, a)$ scegliendola dalle soluzioni di N' ci riesco?

Sì altrimenti

$N' \models \forall x\,[\psi'(x) \to p(x)]$

$p(x)$ isolato su A, a

Lemma $L, N, A, p(x)$ come sopra $\psi(z) \in L(A)$ tale che $N \models \exists z\, \psi(z)$ allora esiste $N' \succ N$ $a \in N' \models \psi(z)$ tale che A, a non isola $p(x)$. Nota che se a non isola $p(x) \Rightarrow a$ non realizza $p(x)$ (se a realizza $a = x$ isola)

Dimostrazione

Scriviamo un tipo $q(z)$ fin. cons. in N tale che ogni $a \models q(z)$ (in qualsiasi N') è come richiesto.

Enumeriamo le formule contenute $L_{x,z}(A)$ $\langle \xi_i(x,z) : i \in \omega \rangle$

per ogni i $q(z)$ "deve dire" che per ogni a $\xi_i(x,a)$ non isola $p(x)$

ovvero $\neg\forall x\,[\xi_i(x,z) \to p(x)]$

ovvero $\exists x\,[\xi_i(x,z) \wedge \neg p(x)]$ ovvero $\exists x\,[\xi_i(x,z) \wedge \bigvee_{\varphi \in p} \neg\varphi(x)]$

ovvero $\bigvee_{\varphi \in p} \exists x\,[\xi_i(x,z) \wedge \neg\varphi(x)]$

Per ogni i scieglere $\varphi_i(x)$ e aggiunge $\exists x\left[\xi_i(x,z)\wedge\neg\varphi_i(x)\right]$

Costruisco $q(z) = \bigcup_{i\in\omega} q_i(z)$ $\quad q_i(z)$ finito $\quad$ Parto da $q_0(z)=\{\psi(z)\}$

Per induzione ho $q_i(z)$ prendo $\varphi_i(x)\in p$ tale che $\quad$ Esiste?

$$q_i(z)\cup\left\{\exists x\left[\xi_i(x,z)\wedge\neg\varphi_i(x)\right]\right\} \text{ è consistente}$$

definisco $q_{i+1}(z) = q_i(z)\cup\left\{\exists x\left[\xi_i(x,z)\wedge\neg\varphi_i(x)\right]\right\}$

Sì! altrimenti per ogni $\varphi\in p$ ho

$$\forall z\,\neg\left[q_i(z)\wedge\exists x\left[\xi_i(x,z)\wedge\neg\varphi_i(x)\right]\right] \iff \forall z\,\forall x\left[q_i(z)\wedge\xi_i(x,z)\to\varphi(x)\right]$$

$$\iff \forall x\left[\underbrace{\exists z\left(q_i(z)\wedge\xi_i(x,z)\right)}_{\text{isola } p(x)}\to\varphi(x)\right] \quad \text{per ogni } \varphi\in p \text{ quindi} \quad ↯$$

$\square$

~~Teorema~~ FALSO Per ogni L numerabile, N arbitrario, $A\subseteq N$ ~~numerabile~~ $p(x)\subseteq L(A)$ tipo non-isolato esiste $N'\succcurlyeq N$, $A\subseteq M\preccurlyeq N'$ che non realizza $p(x)$.

Prendiamo X, Y insiemi $|X|=|Y|>\omega$, $F=\{f: X\to Y \text{ biezioni}\}$

$N = F\sqcup X\sqcup Y$ dominio $\quad$ predicati unari per F, X, Y

Predicato ternario per $f(x)=y$

$N'\succcurlyeq N \qquad N'=F'\sqcup X'\sqcup Y'$ $\quad$ sia $Y_0\subseteq Y$ numerabile, $c\in Y\setminus Y_0$

sia $p(x) = tp(c/X Y_0)$

OSS1 per ogni $a, b \in Y'$ esiste $\sigma \in Aut(N'/X', Y' \setminus \{a,b\})$ t.c. $\sigma a = b$

OSS2 $p(x)$ contiene $x \neq b$ per ogni $b \in Y_0$

Affermo che $p(x)$ non è isolato. Altrimenti esiste $\varphi(x) \in L(X Y_0)$ consistente t.c. $N' \models \forall x \left[\varphi(x) \rightarrow p(x)\right]$. Sia $a \models \varphi(x)$, $a \in N'$. per OSS2 $a \notin Y_0$

Però $\varphi(x) \in L(X, Y_1)$ con $Y_1 \subsetneq Y_0$ finito prendo $b \in Y_0 \setminus Y_1$

per OSS1 esiste $\sigma \in Aut(N'/X, Y_1)$ $\sigma(a) = b \in Y_0$ $b \models p(x)$

Affermo che ogni $M \preccurlyeq N'$ realizza $p(x)$ $\quad M = M_F \sqcup M_X \sqcup M_Y$

$X \subseteq M_X \quad Y_0 \subseteq M_Y$

M_F contiene biiezioni tra M_X e M_Y

$|X| > \omega \quad |Y_0| = \omega$ esiste $f \in M_F$ $a \in X \subseteq M_X$ t.c. $f(a) = a' \notin Y_0$

Per OSS1 $a' \equiv_{X,Y_0} c$ quindi $a' \models p(x)$. $\square$