Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 5 maggio 2023

Tempo a disposizione: 3 ore

Per gli studenti degli a.a. precedenti aventi l'esame da 9 CFU: esercizi 1–4, tempo 2 ore e mezza; **barrare qua:** ☐

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (7 punti) Si indichi con X lo spazio $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e sia Y lo spazio $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathcal{T}$ i cui aperti sono:

$$A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow [x \in A \Rightarrow x + n \in A \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}].$$

Sia $Z := X \times Y$ lo spazio topologico prodotto.

1. Dimostrare che il sottospazio $(0,1) \times \{0,1\} \subset Z$ è connesso.
2. Il sottospazio $[0,1] \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \subset Z$ è compatto?
3. Trovare la chiusura e l'interno di $(0,1) \times [0,1] \subset Z$.

Esercizio 2. (7 punti) Si considerino i seguenti sottospazi topologici di $\mathbb{R}^3$ con la topologia indotta da quella euclidea:

$$X := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+(y+2)^2+z^2 = 1\}, \quad Y := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+(y-2)^2+z^2 = 1\},$$

$$C := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\}, \quad D := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1\}.$$

1. Calcolare il gruppo fondamentale di $X \cup Y \cup D$.
2. Trovare un cammino chiuso con classe non banale nel gruppo fondamentale di $X \cup Y \cup C$.
3. Dire se $X \cup Y \cup C$ è retratto e/o retratto di deformazione di $X \cup Y \cup D$.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\, b^{-1}\, c\, d^{-1}\, e\, a^{-1}\, b\, c^{-1}\, d\, e$$

Determinare se S è orientabile o no, determinare la sua caratteristica di Eulero, e identificare la superficie S.

Esercizio 4. (7 punti) Siano A e B due matrici $n \times n$ complesse e aventi tutti autovalori con molteplicità algebrica ≤ 3.

1. Dimostrare che A e B hanno la stessa forma canonica di Jordan $\Leftrightarrow$ A e B hanno gli stessi autovalori con uguali molteplicità algebriche e geometriche.

2. Mostrare con un controesempio che l'equivalenza in 1. non vale senza l'ipotesi che la molteplicità algebrica sia ≤ 3.

Esercizio 5. (6 punti) Si considerino i seguenti punti nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$:

$A = [1 : 1 : 0 : 0],\ B = [0 : 2 : 1 : -1],\ C = [-1 : 0 : 0 : 1],\ D = [0 : 3 : 1 : 0].$

1. Si dica se A, B, C, D sono in posizione generale, si calcoli la dimensione del sottospazio S da essi generato e se ne trovi l'equazione (o le equazioni) cartesiana/e.

2. Si consideri la retta r generata da A e $E = [1 : -1 : -1 : 1]$, e se ne scrivano le equazioni parametriche e cartesiane.

3. Qual è la posizione reciproca di S e r?