Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 14 giugno 2023

Tempo a disposizione: 3 ore

Per gli studenti degli a.a. precedenti aventi l'esame da 9 CFU: esercizi 1–4, tempo 2 ore e mezza; **barrare qua:** ☐

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (7 punti) Sia $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$ e sia D^0 la sua parte interna, entrambi con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

Per ciascuno dei seguenti spazi topologici quozienti dire, giustificando la risposta:
– se è compatto,
– se la mappa di proiezione al quoziente è chiusa.
(Ricordiamo che dato uno spazio topologico X e un sottospazio A di X, X/A è il quoziente per la relazione di equivalenza data da $x \sim y$ sse $x = y$ o $x, y \in A$).

(*a*) $D/\{(x, y) \in D \,|\, y \ge 0\}$

(*b*) $D/\{(x, y) \in D \,|\, y > 0\}$

(*c*) $D^0/\{(x, y) \in D^0 \,|\, y \ge 0\}$

(*d*) $D/\{(0, 1), (1, 0)\}$.

Soluzione. I quozienti (a), (b) e (d) sono compatti perché quozienti di D compatto.

Il quoziente X in (c) non è compatto. Infatti consideriamo

$$A := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > -\frac{1}{2}\Big\}, \quad B := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1 - \frac{1}{n}\Big\},$$
$$U_n := D^0 \cap \big(A \cup B\big).$$

Allora U_n è aperto di D^0 e contiene $\{(x,y) \in D^0 \mid y \geq 0\}$, per cui se $\pi\colon D_0 \to X$ è la proiezione al quoziente, abbiamo $\pi^{-1}(\pi(U_n)) = U_n$ aperto, quindi $\pi(U_n)$ è aperto in X. Inoltre

$$\bigcup_{n\geq 2} \pi(U_n) = \pi\big(\bigcup_{n\geq 2} U_n\big) = \pi(D_0) = X,$$

pertanto $\{\pi(U_n)\}_{n\geq 2}$ è un ricoprimento aperto di X.

D'altronde $\pi(U_n) \subseteq \pi(U_{n+1})$, per cui ogni unione finita di aperti del ricoprimento è un aperto del ricoprimento, ma $\pi(U_n) \neq X$ per ogni n, quindi non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

Se A è chiuso in X, la proiezione $\pi\colon X \to X/A$ è chiusa. Infatti dato $C \subset X$ chiuso, se $C \cap A = \emptyset$, allora $\pi^{-1}(\pi(C)) = C$ pertanto $\pi(C)$ è chiuso. Se $C \cap A \neq \emptyset$, allora $\pi^{-1}(\pi(C)) = C \cup A$ chiuso, pertanto $\pi(C)$ è ancora chiuso.

Concludiamo che la proiezione è chiusa per i quozienti (a), (c) e (d). Mostriamo che la proiezione per il quoziente (b) non è chiusa. Sia

$$C := \{(x,y) \in D \mid x \geq 0\}$$

chiuso in D. Allora $\pi^{-1}(\pi(C)) = C \cup \{(x,y) \in D \mid y > 0\}$ che non è chiuso in D, pertanto $\pi(C)$ non è chiuso al quoziente.

Esercizio 2. (6 punti) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$, con $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}, \quad Z_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \lambda\}.$$

1. Trovare il gruppo fondamentale dell'insieme $X = S^2 \cup Z_0 \cup Z_{\frac{1}{2}}$.
2. Dire se la superficie sferica S^2 è un retratto di X.
3. Dire se l'insieme $W = X \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < \frac{1}{2}\}$ è retratto e/o retratto di deformazione di X.

Soluzione.

1. L'insieme X è una superficie sferica tagliata da due piani orizzontali ed è omotopicamente eq a tre sfere adiacenti. Il gruppo fondamentale di X è banale. Si può dimostrare usando il Teorema di Van Kampen, applicato a $A = X \cap \{z < 1/2\}$ e $B = X \cap \{z > 0\}$. A e B sono aperti di X non vuoti, cpa, e con intersezione non vuota e cpa, inoltre sono entrambi omotopicam equivalenti a una sfera, quindi il loro gruppo fond è banale. Dunque anche $\pi(X)$ è banale.

2. S^2 è retratto di X tramite la funzione $r : X \to S^2$ che è l'identità su S^2 ed è l'inversa della proiezione stereografica sui piani orizzontali, r è continua per il lemma di incollamento.

3. W non è retratto di X, perché W è omotopicamente equivalente a un cilindro e quindi ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$, mentre X ha gruppo fondamentale banale. Quindi non è nemmeno retratto di deformazione.

Esercizio 3. (6 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza:

$$W = c^{-1}\, d^{-1}\, b\, a\, c\, e\, e\, a\, d^{-1}\, b^{-1}$$

(a) Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

(b) Determinare una superficie compatta e orientabile T tale che $\chi(S\sharp T) = -4$, oppure dimostrare che una tale superficie non esiste.

Soluzione.

(a) S ha 2 vertici, 5 spigoli e 1 faccia, dunque ha caratteristica $2-5+1 = -2$. Poiché non è orientabile, è la somma connessa di 4 piani proiettivi.

(b) Abbiamo $S = P_4$, e sia $T = T_g$ con $g \geq 0$. Abbiamo visto a lezione che $P_4 \sharp T_g = P_{4+2g}$, e che $\chi(P_{4+2g}) = 2 - (4 + 2g) = -2 - 2g$. Pertanto deve essere $-2 - 2g = -4$ e cioè $g = 1$. Dunque la superficie T esiste ed è un toro T_1 con 1 buco.

Esercizio 4. (6 punti) Siano $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ due matrici quadrate di ordine n a coefficienti complessi.

Dimostrare che: se A ha n autovalori distinti e $A \cdot B = B \cdot A$, allora A e B sono simultaneamente diagonalizzabili. (*Suggerimento*: mostrare che A e B hanno gli stessi autovettori.)

Soluzione. Proviamo che B ha gli stessi autovettori di A, dunque B è diagonalizzabile e le due matrici lo sono simultaneamente. Sia v autovettore di A di autovalore λ, dunque $ABv = BAv = B\lambda v = \lambda Bv$ e Bv appartiene all'autospazio V_λ di A relativo all'autovalore λ. Essendo gli autovalori distinti, V_λ ha dimensione 1 e $Bv = \mu v$ per un qualche $\mu \in \mathbb{C}$.

Esercizio 5. (7 punti) Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, con coordinate omogenee $(x : y : z)$, si considerino la retta r di equazione $y+z=0$ e i punti:

$$A = (0 : 0 : 1), \quad B = (0 : 1 : 0), \quad P = (1 : -1 : 1).$$

(a) Determinare l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per A e B e tangenti alla retta r nel punto P.

(b) Consideriamo la retta $z = 0$ come retta impropria e il complementare come il piano affine $\mathbb{R}^2$. Mostrare che il fascio $\mathcal{F}$ contiene esattamente una conica che è una parabola in $\mathbb{R}^2$, e determinarne l'equazione in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione.

(a) Il fascio $\mathcal{F}$ è generato dalle coniche $r \cup \overline{AB}$ e $\overline{AP} \cup \overline{BP}$. Le equazioni delle rette coinvolte sono:

$$\overline{AB}\colon x = 0, \quad \overline{AP}\colon x + y = 0, \quad \overline{BP}\colon x - z = 0,$$

per cui il fascio ha equazione

$$\lambda x(y + z) + \mu(x + y)(x - z) = 0$$

ovvero

$$\mu x^2 + (\lambda + \mu)xy + (\lambda - \mu)xz - \mu yz = 0.$$

(b) Per essere una parabola, la conica deve essere tangente alla retta impropria (e avere rango massimo). Intersechiamo le coniche del fascio con la retta impropria $z = 0$; si ottiene

$$x(\mu x + (\lambda + \mu)y) = 0.$$

La soluzione $x = 0$ corrisponde al punto B, punto base del fascio. La condizione per imporre che la conica sia tangente alla retta impropria in B è $\lambda + \mu = 0$, e la conica corrispondente ha equazione:

$$x^2 - 2xz - yz = 0.$$

L'equazione della conica affine è $y = x^2 - 2x$ che è effettivamente una parabola. Notiamo che l'asse della parabola ha direzione verticale, e infatti la parabola ha punto improprio il punto B che corrisponde alla direzione verticale.