Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 1 – a.a. 2023-24

Da consegnare: lunedì 9 ottobre 2023

Esercizio 1. Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato (e cioè la relazione $\leq$ è riflessiva, antisimmetrica e transitiva). Mostrare che i sottoinsiemi

$$M_x = \{y \in X \mid x \leq y\}$$

formano, al variare di $x \in X$, una base di una topologia.

Esercizio 2. Nel piano $\mathbb{R}^2$ si consideri la famiglia $\mathcal{T}$ formata dall'insieme vuoto, da $\mathbb{R}^2$ e da tutti i dischi senza bordo $D_r = \{x^2+y^2 < r^2\}$, per $r > 0$. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}^2$ e determinare la chiusura dell'iperbole di equazione $xy = 1$.

Esercizio 3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{B}_1 = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon < 1\}$$

delle palle aperte di raggio minore di 1 e centro arbitrario è una base per la topologia indotta dalla distanza.

Esercizio 4. Su $\mathbb{R}^n$ consideriamo le distanze

$$d_\infty(x, y) = \max_i\{|x_i - y_i|\}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sono due punti arbitrari di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare le diseguaglianze

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$$

valide per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Osservazione. Da queste diseguaglianze si ottiene immediatamente che le tre distanze inducono la stessa topologia su $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 5. Consideriamo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi e per ogni intero positivo o nullo a poniamo

$$B_a = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

e cioè B_a è l'insieme dei multipli (interi) di a. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{B} = \{B_a \mid a \geq 0, a \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base di una topologia su $\mathbb{Z}$. Indicheremo questa topologia con $\mathcal{T}$.

2. Dimostrare che se A è un aperto, non vuoto e finito allora $A = B_0 = \{0\}$.

3. Dimostrare che $C = \{-1, 1\}$ è chiuso.

4. Determinare la chiusura di $D = \{2\}$.

Esercizio 6. Uno spazio topologico si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso (in modo equivalente, tutti i punti sono chiusi). Dimostrare che uno spazio topologico X è **T1** se e solo se per ogni $x \in X$ si ha:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U$$

(l'intersezione di tutti gli intorni di un punto è solo il punto stesso).

Dimostrare che ogni spazio metrico è **T1**.

Esercizio 7. Sia X uno spazio metrico. Dimostrare che una palla aperta di raggio 1 non può contenere propriamente una palla aperta di raggio 2.

Trovare, o dimostrare che non esiste, uno spazio metrico con una palla aperta di raggio 2 che contiene propriamente una palla aperta di raggio 3.