Esercizi

3.7 (♡). Descrivere una coppia di sottoinsiemi $A, B \subset \mathbb{R}$ tali che

$$A \cap B = \emptyset, \qquad \overline{A} \cap B \neq \emptyset, \qquad A \cap \overline{B} \neq \emptyset\,.$$

3.8 (♡). Siano A, B sottoinsiemi di uno spazio topologico. Dimostrare che vale $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3.9 (♡). Sia A un sottoinsieme denso di uno spazio topologico X. Dimostrare che per ogni aperto $U \subset X$ vale $\overline{U \cap A} = \overline{U}$.

3.10. Sul piano $\mathbb{R}^2$ si consideri la famiglia $\mathcal{T}$ formata dall'insieme vuoto, da $\mathbb{R}^2$ e da tutti i dischi aperti $\{x^2+y^2 < r^2\}$, per $r > 0$. Dimostrare che si tratta di una topologia e determinare la chiusura dell'iperbole di equazione $xy = 1$.

3.11. Mostrare che, nella topologia euclidea su $\mathbb{R}$, gli intervalli chiusi $[-2^{-n}, 2^{-n}]$ formano, al variare di $n \in \mathbb{N}$, un sistema fondamentale di intorni di 0.

3.12. Uno spazio topologico si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso. Dimostrare che uno spazio topologico X è T1 se e solo se per ogni $x \in X$ vale

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} U.$$

3.13. Sia $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sistema fondamentale numerabile di intorni di un punto x in uno spazio topologico. Dimostrare che la famiglia

$$\{V_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

è ancora un sistema fondamentale di intorni di x.

3.14 (♡). Sia X un insieme e supponiamo data, per ogni $x \in X$, una famiglia $\mathcal{I}(x)$ di sottoinsiemi di X in modo tale che le seguenti cinque condizioni siano soddisfatte:

1. $X \in \mathcal{I}(x)$ per ogni punto $x \in X$.
2. $x \in U$ per ogni $U \in \mathcal{I}(x)$.
3. Se $U \in \mathcal{I}(x)$ e $U \subset V$, allora $V \in \mathcal{I}(x)$.
4. Se $U, V \in \mathcal{I}(x)$, allora $U \cap V \in \mathcal{I}(x)$.
5. Se $U \in \mathcal{I}(x)$, allora esiste un sottoinsieme $V \subset U$ tale che $x \in V$ e $V \in \mathcal{I}(y)$ per ogni $y \in V$.

Dimostrare che esiste un'unica topologia su X, rispetto alla quale $\mathcal{I}(x)$ è la famiglia degli intorni di x, per ogni $x \in X$.

3.15. Sia X un insieme fissato. Chiameremo *operatore di chiusura* su X, un'applicazione $C\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ che soddisfa le seguenti quattro proprietà (dette *di Kuratowski*):

1. $A \subset C(A)$ per ogni sottoinsieme $A \subset X$.
2. $C(A) = C(C(A))$ per ogni sottoinsieme $A \subset X$.
3. $C(\emptyset) = \emptyset$.
4. $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$ per ogni $A, B \subset X$.

Dimostrare che per ogni struttura topologica su X, l'applicazione $A \mapsto \overline{A}$ è un operatore di chiusura e, viceversa, che per ogni operatore di chiusura C su X esiste un'unica struttura topologica rispetto alla quale $C(A) = \overline{A}$.

3.16. Trovare l'errore, o gli errori, nella seguente pseudodimostrazione dell'inclusione $\overline{\cup_i A_i} \subset \cup_i \overline{A_i}$. Sia $x \in \overline{\cup_i A_i}$, allora ogni intorno di x interseca $\cup_i A_i$, quindi ogni intorno interseca qualche A_i e di conseguenza x appartiene alla chiusura di A_i.

3.3 Applicazioni continue

Definizione 3.24. *Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici si dice* ***continua*** *se, per ogni aperto $A \subset Y$ l'insieme*

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

è aperto in X.

Prima di proseguire, osserviamo che l'operatore $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ commuta con le operazioni di passaggio al complementare ed unione, e cioè

$$f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A), \qquad f^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i f^{-1}(A_i).$$

Da ciò segue che:

1. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se per ogni chiuso $C \subset Y$ l'insieme $f^{-1}(C)$ è chiuso in X (passaggio al complementare).
2. Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di Y. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se per ogni $B \in \mathcal{B}$ l'insieme $f^{-1}(B)$ è aperto in X (ogni aperto in Y è unione di elementi di $\mathcal{B}$).

Lemma 3.25. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione tra due spazi topologici. Allora f è continua se e solo se $f(\,\overline{A}\,) \subset \overline{f(A)}$ per ogni sottoinsieme $A \subset X$.*

Dimostrazione. Supponiamo f continua, allora per ogni $A \subset X$ il sottoinsieme $f^{-1}(\,\overline{f(A)}\,)$ è un chiuso che contiene A. Ne consegue che $\overline{A} \subset f^{-1}(\,\overline{f(A)}\,)$ e quindi che $f(\,\overline{A}\,) \subset \overline{f(A)}$.

Viceversa, supponiamo $f(\,\overline{A}\,) \subset \overline{f(A)}$ per ogni $A \subset X$. In particolare per ogni chiuso $C \subset Y$ si ha (ponendo $A = f^{-1}(C)$)

$$f(\,\overline{f^{-1}(C)}\,) \subset \overline{f(f^{-1}(C))} = \overline{C} = C$$

e quindi $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C)$, che equivale a dire che $f^{-1}(C)$ è chiuso. □

Il Lemma 3.25 implica la totale equivalenza tra la Definizione 1.4 e la Definizione 3.24.