Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 1 - 3 Ottobre 2023

Esercizio 1. *(Definizione di topologia, base, interno chiusura)* Consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\}.$$

1. $\mathcal{F}$ definisce gli aperti di una topologia su $\mathbb{R}$? $\mathcal{F}$ definisce i chiusi di una topologia su $\mathbb{R}$?
2. Mostrare che $\mathcal{F}$ è una base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$, e descriverne gli aperti.
3. Sia $S = \{1\} \cup [3, 5]$; determinare l'interno e la chiusura di S in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Esercizio 2. *(Definizione di topologia)* Sia X un insieme e $a \in X$ un elemento fissato. Verificare che

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid a \notin A \text{ oppure } X \setminus A \text{ è finito}\}$$

è una topologia su X.

Esercizio 3. *(Definizione di topologia, interno)* Si consideri la seguente topologia su $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} \mid U \supset \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{\emptyset\}.$$

1. Provare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$.
2. Provare che ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ ha interno vuoto oppure uguale a se stesso.
3. Dimostrare che la topologia indotta da $\mathcal{T}$ su $(-\infty, 0)$ è la topologia discreta.

Esercizio 4. *(Basi topologia, intorni)* Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi si considerino gli insiemi

$$A(n) = \begin{cases} \{n\} & n \text{ dispari} \\ \{n-1, n, n+1\} & n \text{ pari} \end{cases}$$

e sia $\mathcal{B} = \{A(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la famiglia di tutti gli insiemi $A(n)$.

1. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{Z}$.
2. Descrivere gli aperti di tale topologia.
3. Determinare la famiglia di tutti gli intorni del punto 2 e del punto 3.

Esercizio 5. *(Basi topologia, intorni)* Sia $X = \mathbb{R}^2$ e consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di X

$$A \in \mathcal{T} \iff [(x, y) \in A \implies (x^2, y^3) \in A]$$

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.
2. Sia $\alpha = (a, b) \in X$ e consideriamo l'insieme

$$U_\alpha = \left\{ \left(a^{2^k}, b^{3^k} \right) \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} = \left\{ (a, b), \left(a^2, b^3\right), \left(a^4, b^9\right), \dots \right\}$$

   Dimostrare che U_α è aperto.
3. Sia $\alpha \in X$ e sia $\mathcal{I}(\alpha)$ la famiglia di tutti gli intorni di α. Dimostrare che

$$\bigcap_{U \in \mathcal{I}(\alpha)} U = U_\alpha$$

4. In X esistono 6 punti aperti. Determinarli tutti.

Esercizio 6. *(Topologie e proprietà T1)* Sia X un insieme con infiniti elementi e sia $a \in X$ fissato. Sia data la famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X definita da

$$A \in \mathcal{T} \iff A = \emptyset \text{ oppure } a \in A.$$

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ definisce su X una topologia.
2. Lo spazio $(X, \mathcal{T})$ è $T1$?
3. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione, dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali con la topologia euclidea. Dimostrare che f è continua se e solo se f è costante.

Esercizio 7. *(Funzioni continue)* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, dove $\mathbb{R}$ è dotato della topologia euclidea. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ denotiamo:

$$M(k) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > k\} \quad m(k) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < k\}.$$

Dimostrare che f è continua se e solo se $M(k)$ e $m(k)$ sono aperti per ogni k.

Esercizio 8. *(Funzioni continue)* Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia cofinita. Per ognuna delle seguenti funzioni dire se è continua:

(a) $f : X \to X,\ f(x) = x(x-1)(x-2)$;

(b) $g : X \to X,\ g(x) = \sin x$;

(c) $h : X \to X,\ h(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x \geq 0, \\ -x + 5 & \text{se } x < 0. \end{cases}$