Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 2 – a.a. 2023-24

Da consegnare: lunedì 16 ottobre 2023

Esercizio 1. Siano X, Y spazi topologici, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sottoinsiemi. Dimostrare che

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

In particolare, il prodotto di due chiusi è chiuso nel prodotto.

Suggerimento: per svolgere questo esercizio, conviene dimostrare alcune affermazioni preliminari.

Lemma A. *Sia X uno spazio topologico e $A \subseteq X$. Sia $x \in X$ un punto e fissiamo $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un* sistema fondamentale di intorni *di x. Allora:*

$$x \in \overline{A} \iff \forall i \in I \quad U_i \cap A \neq \emptyset$$

(cioè basta controllare quello che capita per un sistema fondamentale di intorni e non per tutti gli intorni).

Questo primo lemma è immediato, scrivere i dettagli della dimostrazione per convincersene.

Lemma B. *Siano X, Y spazi topologici, $x \in X$, $y \in Y$ e siano $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un sistema fondamentale di intorni di x e $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un sistema fondamentale di intorni di y. Poniamo $W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq X \times Y$. Allora:*

$$\mathcal{W} = \{W_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$$

è un sistema fondamentale di intorni di $(x, y) \in X \times Y$.

Ne abbiamo parlato a lezione ma abbiamo solo accennato alla dimostrazione. Scrivere la dimostrazione completa.

Utilizzando i Lemmi A e B, dimostrare l'enunciato dell'esercizio.

Esercizio 2. Dimostrare che uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se per ogni suo punto x vale

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U}$$

Confrontare questa proprietà con la proprietà analoga per gli spazi **T1** (Esercizio 6 del primo foglio di tutorato). Da questo enunciato si ottiene un'altra immediata dimostrazione che **T2** $\implies$ **T1**.

Esercizio 3. (Esercizio 1 dello scritto del 14 settembre 2016). Sia X un insieme con la topologia dei complementari finiti (un sottoinsieme è aperto se e solo se è l'insieme vuoto oppure il suo complementare è finito). Dimostrare che X è di Hausdorff se e solo se X è finito. In questo caso, qual è la topologia su X?

Esercizio 4. Considerare le topologie degli esercizi 1–5 del **Foglio Esercitazione 1 - 3 ottobre 2023** (vedi Moodle, prima settimana) e per ognuna di esse dire se è di Hausdorff o no.

Suggerimento: A volte le proprietà della topologia illustrate nel testo dell'esercizio suggeriscono subito la risposta.

Esercizio 5. Proprietà degli spazi **T1**:

1. dimostrare che un sottospazio di uno spazio **T1** è **T1**;
2. dimostrare che il prodotto di spazi **T1** è **T1** (suggerimento: usare la proprietà $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ dell'Esercizio 1);
3. essere **T1** è una proprietà topologica cioè

$$X \text{ omeomorfo a } Y \implies [X\,\mathbf{T1} \iff Y\,\mathbf{T1}]$$

   (usare la stessa idea che abbiamo usato a lezione per il caso Hausdorff);
4. due spazi topologici X e Y sono **T1** se e solo se il prodotto $X \times Y$ è **T1**