Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 3 – a.a. 2023-24

Da consegnare: lunedì 23 ottobre 2023

CONNESSIONE

Esercizio 1. Abbiamo usato varie volte a lezione il fatto che gli intervalli della retta reale con la topologia euclidea sono omeomorfi fra loro. Dimostrare, trovando un omeomorfismo esplicito, che:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$ si ha $[0, 1]$ omeomorfo a $[a, b]$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$ si ha $[0, 1)$ omeomorfo a $[a, b)$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$ si ha $(0, 1)$ omeomorfo a (a, b)
4. è vero che $[0, 1)$ è omeomorfo a $(0, 1]$?

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico, $Y, A \subseteq X$ con Y connesso e A aperto e chiuso. Abbiamo visto (Manetti, Lemma 4.4) che allora $Y \subseteq A$ oppure $Y \cap A = \emptyset$, cioè un connesso o è contenuto in un insieme aperto e chiuso oppure è contenuto nel suo complementare. Questo in particolare è vero per le componenti connesse di X, perché sono sottospazi connessi.

Dimostrare che: se A è un sottoinsieme aperto e chiuso non vuoto di X, allora A è unione di componenti connesse di X.

Esercizio 3. Abbiamo visto a lezione che esistono sottospazi di $\mathbb{R}^n$ connessi ma non connessi per archi, per esempio la chiusura del grafico di $\sin(1/x)$.

Se invece consideriamo sottoinsiemi *aperti* questo non capita, cioè un aperto connesso è connesso per archi. Per dimostrarlo, sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (con la topologia euclidea) un sottoinsieme *aperto* e sia $a \in U$. Definiamo

$$C_a = \{x \in U \mid \text{ esiste un cammino contenuto in } U \text{ che congiunge } a \text{ e } x\}$$

(C_a è la *componente connessa per archi* di a).

1. Dimostrare che le componenti connesse per archi formano una partizione di U.
2. Dimostrare che C_a è aperto in U (nella topologia di sottospazio) per ogni $a \in U$.
3. Dimostrare che C_a è chiuso in U (nella topologia di sottospazio) per ogni $a \in U$.
4. Dedurre che un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

Dopo aver fatto la dimostrazione, determinare una proprietà P degli spazi topologici in modo che sia vero il

Teorema. *Sia X uno spazio topologico con la proprietà P. Allora tutti gli aperti connessi di X sono connessi per archi.*

COMPATTEZZA

Esercizio 4. (Esercizio 3, compito del 15 giugno 2016) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Dimostrare che f è continua (nella topologia euclidea) se e solo se il grafico di f è compatto.

Trovare un esempio di funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ discontinua il cui grafico sia chiuso (ma non compatto, naturalmente).

Suggerimento: per l'implicazione "grafico compatto $\implies$ funzione continua" usare la formula di proiezione (foglio di tutorato 0) per calcolare le controimmagini.

Esercizio 5. (Esercizio 3, compito del 7 luglio 2016) Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Dimostrare che S è compatto se e solo se ogni funzione $f : S \to \mathbb{R}$ continua ammette massimo.

Suggerimento: ricordare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Esercizio 6. Considerare le topologie degli esercizi 1–5 del **Foglio Esercitazione 1 - 3 ottobre 2023** (vedi Moodle, prima settimana) e per ognuna di esse dire se lo spazio è connesso oppure compatto.

Suggerimento: A volte le proprietà della topologia illustrate nel testo dell'esercizio suggeriscono subito la risposta.

Esercizio 7. Abbiamo parlato a lezione delle possibili generalizzazioni dell'equivalenza "compatto $\iff$ chiuso e limitato". In questo esercizio esploriamo la situazione.

Come abbiamo osservato, per parlare di limitatezza occorre una nozione di distanza e quindi l'ambito giusto è quello degli spazi metrici. Il punto 2 mostra che la compattezza implica addirittura la totale limitatezza, e il punto 3 spiega perché in $\mathbb{R}^n$ basta la nozione più semplice di limitatezza, in quanto equivalente alla totale limitatezza.

Un esempio semplice per vedere che limitatezza e totale limitatezza non sono sempre equivalenti, e cioè che nel punto 1 non è vero il "se e solo se", è un insieme infinito X con la metrica discreta: per ogni $x, y \in X$ poniamo $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$ e $d(x,x) = 0$. Si verifica immediatamente (esercizio!) che d è una metrica, che la topologia indotta dalla metrica è la topologia discreta e che X è limitato ma non totalmente limitato (porre $\varepsilon = 1/2$).

Il punto 4 mostra che nel punto 2 non è vero il "se e solo se". Per avere l'implicazione "chiuso e totalmente limitato $\implies$ compatto" dobbiamo aggiungere qualche ipotesi (che perlomeno escluda lo spazio metrico $\mathbb{Q}$). Una tale ipotesi è, per esempio, "X è uno spazio metrico *completo*", cioè ogni successione di Cauchy converge.

Dopo questi commenti, ecco l'esercizio.

Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice

1. **limitato** se esiste un numero reale $R > 0$ tale che A è contenuto in una palla aperta di raggio R;

2. **totalmente limitato** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di A composto da palle aperte di raggio ε.

Dimostrare che:

1. A totalmente limitato $\implies$ A limitato;
2. A compatto $\implies$ A chiuso e totalmente limitato;
3. se $X = \mathbb{R}^n$ allora A limitato $\implies$ A totalmente limitato;
4. se $X = \mathbb{Q}$ (con la metrica indotta dalla metrica di $\mathbb{R}$) allora
$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$
è chiuso e totalmente limitato ma non è compatto.

Esercizio 8. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia $X = \{a, b\}$ un insieme formato da due elementi distinti e dotato della topologia banale. Sia $Y = \mathbb{R} \times X$ lo spazio topologico prodotto.

1. Scrivere una base per la topologia di Y.
2. Dire se Y è T_1, se è connesso, e se è compatto.
3. Consideriamo i seguenti sottospazi di Y:
$$Z = \big((-1, 1) \times \{a\}\big) \cup \big([-2, 2] \times \{b\}\big),$$
$$W = \big((-1, 1) \times \{a\}\big) \cup \big((-2, 2) \times \{b\}\big).$$
Stabilire se Z e W sono compatti.