Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 3 - 17 Ottobre 2023

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico e Y uno spazio con almeno due punti distinti con la topologia discreta. Dimostrare che X è connesso se e solo se ogni funzione continua $f : X \to Y$ è costante.

Esercizio 2. Dimostrare che ogni omeomorfismo trasforma componenti connesse in componenti connesse. Cioè: se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo e $C \subseteq X$ è una componente connessa di X, allora $f(C)$ è una componente connessa di Y. Concludere che due spazi omeomorfi hanno lo stesso numero di componenti connesse.

Esercizio 3. Dire, motivando la risposta, se i seguenti spazi topologici (dotati della topologia euclidea) sono omeomorfi:

- $X = [0, 1]$ e $Y = (0, 1)$,
- $X = [0, 1]$ e $Y = S^1$,
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$ e $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$,
- $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, si considerino i sottospazi:

$$A = \{(x, n) \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \quad \text{e} \quad B = \Big\{(x, y) \mid y = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\Big\}.$$

Si consideri inoltre l'applicazione continua $g : A \to B$ definita da

$$g(x, n) = \left(x, \frac{x}{n}\right).$$

1. A è connesso per archi? è chiuso in $\mathbb{R}^2$?
2. B è connesso per archi? è chiuso in $\mathbb{R}^2$?
3. Sia $C = \{(x, 1) \in A \mid -1 \leq x \leq 1\}$; C è chiuso in A? $g(C)$ è chiuso in B?

Esercizio 5. Sia X uno spazio topologico e siano A e B due sottospazi compatti.

1. E' noto che $A \cup B$ è compatto.
2. Se X è di Hausdorff, dimostrare che $A \cap B$ è compatto.
3. Trovare un esempio in cui $A \cap B$ non è compatto

Esercizio 6. Sia J l'intervallo chiuso $[0, 1]$ con la topologia i cui aperti sono il vuoto, $[0, 1]$, e gli intervalli $[0, a)$ con $a \in [0, 1]$.

1. J è T_1 e/o T_2?
2. Mostrare che $\{0,1\}$ con la topologia indotta da J è connesso per archi.
3. Sia I l'intervallo chiuso $[0,1]$ con la topologia euclidea, e sia $X = I \times J$ con la topologia prodotto. Determinare la chiusura in X di
$$\Delta = \{(x,x) \in X \mid x \in [0,1]\}.$$
4. Dare un esempio di un sottoinsieme $C \subset J$ di cardinalità infinita, compatto, ma non chiuso.

Esercizio 7. Sia $X = M(2,\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali con la topologia euclidea e sia
$$Y = \{A \in X \mid A^2 = I\},$$
dove I è la matrice identità.

1. dimostrare che Y è chiuso;
2. dimostrare che Y non è compatto;
3. Y è connesso?

Esercizio 8. Sia X contenuto nel piano $\mathbb{R}^2$ definito come segue. Per ogni intero $n \geq 1$, poniamo $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1/n,\ 0 \leq y \leq 1\}$ e definiamo lo spazio topologico
$$X = \bigcup_{n\geq 1} A_n \cup \{(0,0),(0,1)\}$$
con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che:

1. X non è compatto;
2. per ogni n, il sottoinsieme A_n è aperto e chiuso in X;
3. per ogni n, il sottoinsieme A_n è una componente connessa di X;
4. i punti $\{(0,0)\}$ e $\{(0,1)\}$ sono componenti connesse di X.

Esercizio 9. Si indichi con X lo spazio $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e sia Y lo spazio $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathcal{T}$ i cui aperti sono:
$$A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow [x \in A \Rightarrow x+n \in A \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}].$$
Sia $Z := X \times Y$ lo spazio topologico prodotto.

1. Dimostrare che il sottospazio $(0,1) \times \{0,1\} \subset Z$ è connesso.
2. Il sottospazio $[0,1] \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \subset Z$ è compatto?
3. Trovare la chiusura e l'interno di $(0,1) \times [0,1] \subset Z$.