Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 4 - 24 Ottobre 2023

Esercizio 1. Sia $n \geq 1$ e $N = (0, \ldots, 0, 1)$ il polo nord della sfera $S^n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$. La *proiezione stereografica*

$$f : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$$

è definita identificando $\mathbb{R}^n$ con l'iperpiano $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ di equazione $x_n = 0$ e ponendo $f(x)$ come l'intersezione di H con la retta passante per i punti x e N. Trovare l'espressione per f in coordinate (almeno per $n = 2$) e dimostrare che è un omeomorfismo.

Esercizio 2. Sia $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ la circonferenza unitaria (pensata come numeri complessi di norma 1) e sia $X = S^1 \times [0, 1]$. Definiamo la seguente relazione su X

$$(x, t) \sim (y, s) \iff tx = sy.$$

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo al disco unitario chiuso $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Esercizio 3. Sia $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq x \leq 1/2, -1/2 \leq y \leq 1/2\}$ il quadrato con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^2$ euclideo. Si consideri su Q la relazione di equivalenza: $(1/2, y) \sim (-1/2, y') \Leftrightarrow y = -y'$. Lo spazio topologico quoziente $X := Q/\sim$ si chiama nastro di Moebius.

Si consideri ora la striscia infinita $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq y \leq 1/2\}$ con la relazione di equivalenza:

$$(x, y) \sim (z, w) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}, z = x + m, w = (-1)^m y$$

Dimostrare che lo spazio quoziente $Y := S/\sim$ è omeomorfo al nastro di Moebius.

Esercizio 4. Sia $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, 0) \leq 1\}$ la palla di dimensione n in $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$. Consideriamo su D^n la relazione di equivalenza che identifica tutti i punti del bordo $\delta D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, 0) = 1\}$. Dimostrare che il quoziente è omeomorfo alla sfera S^n in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Esercizio 5. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *localmente costante* se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) = f(x)$ per ogni $y \in U$.

Provare che se X è connesso e $f : X \to \mathbb{R}$ è (continua e) localmente costante, allora f è costante.

Esercizio 6. Si denoti con $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ lo spazio $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea. Si ponga:

$$\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{E} \mid \sin x > 0 \quad \forall x \in U\} \cup \{\mathbb{R}\}$$

1. Verificare che $\mathcal{T}$ è una topologia sull'insieme $\mathbb{R}$.
2. Determinare l'interno e la chiusura di $[0, 1]$ rispetto alla topologia $\mathcal{T}$.
3. Dire se $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathcal{T}$ è compatto.
4. Dire se $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathcal{T}$ è connesso per archi.
5. Dimostrare che la funzione $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ definita da $f(x) = x + 2\pi$ è continua.

Esercizio 7. Siano X e Y due spazi topologici e $f, g \colon X \to Y$ due applicazioni continue. Consideriamo i loro grafici Γ_f e Γ_g con la topologia indotta dalla topologia prodotto di $X \times Y$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando le risposte:

1. Y di Hausdorff $\Rightarrow \Gamma_f$ chiuso in $X \times Y$,
2. Γ_f connesso $\Rightarrow \Gamma_g$ connesso,
3. Γ_f chiuso in $X \times Y \Rightarrow f$ chiusa.

Esercizio 8. Sia $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ e sia D^0 la sua parte interna, entrambi con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$. Dire quali dei seguenti spazi topologici quozienti sono compatti e/o di Hausdorff, giustificando la risposta.

1. $D/\{(x, y) \in D \,|\, y \geq 0\}$,
2. $D/\{(x, y) \in D \,|\, y > 0\}$,
3. $D^0/\{(x, y) \in D^0 \,|\, y \geq 0\}$.