Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 4 – a.a. 2023-24

Da consegnare: lunedì 30 ottobre

Esercizio 1. Diremo che una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di un insieme X ha la *proprietà dell'intersezione finita* se per ogni sottofamiglia finita e non vuota $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ vale

$$\bigcap\{A | A \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$$

Dimostrare che uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

Leggere anche la Proposizione 4.46 del Manetti e osservare che è un caso particolare di questo esercizio. Il teorema di Analisi detto "teorema degli intervalli incapsulati" è un caso particolare della Proposizione 4.46.

Esercizio 2. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e ∞ un elemento che non appartiene ad X. Poniamo $X^\infty = X \cup \{\infty\}$. Definiamo una famiglia $\mathcal{T}^\infty$ di sottoinsiemi di X^∞ come

$$V \in \mathcal{T}^\infty \iff \begin{cases} V \in \mathcal{T} & \text{oppure} \\ V = U \cup \{\infty\} \text{ e } X - U \text{ è chiuso e compatto in } X \end{cases}$$

Dimostrare che:

1. $\mathcal{T}^\infty$ è una topologia per X^∞
2. X^∞ è compatto in questa topologia
3. l'inclusione $i : X \hookrightarrow X^\infty$ è un'immersione aperta (e quindi la topologia di sottospazio su X è $\mathcal{T}$).
4. Se X non è compatto, allora X è denso in X^∞. Se invece X è compatto, allora $\{\infty\}$ è un punto isolato di X^∞.
5. Se $X = [0, 1)$ è l'intervallo semiaperto con la topologia euclidea, allora X^∞ è omeomorfo all'intervallo chiuso $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.
6. Se $X = (0, 1)$ è l'intervallo aperto con la topologia euclidea, allora X^∞ è omeomorfo a S^1 (la circonferenza unitaria in $\mathbb{R}^2$).

Lo spazio X^∞ si chiama la *compattificazione di Alexandroff* di X

Esercizio 3. *(Esercizio 4.44 del Manetti)* Sia G un gruppo topologico con elemento neutro e. Dimostrare che:

1. Se $H \subseteq G$ è un sottogruppo, allora anche la sua chiusura $\overline{H}$ è un sottogruppo.
2. La componente connessa di e in G è un sottogruppo chiuso.

Esercizio 4. Sia $X_{n,m} \subset \mathbb{R}^{n,n}$ il sottospazio topologico delle matrici reali $n \times n$ dato da

$$X_{n,m} = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A^m = I\}$$

dove $I =$ matrice identità e m è un intero positivo fissato. Determinare se $X_{n,m}$ è compatto e se è connesso.

Rispondere alle stesse domande per

$$Y_{n,m} = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} \mid A^m = I\}$$

formato da matrici a coefficienti complessi.