Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 5 - 31 Ottobre 2023

Esercizio 1. Sia $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il gruppo di omeomorfismi di S^1 in sè generato dalla moltiplicazione per -1. Dimostrare che il quoziente S^1/G è omeomorfo a S^1. Fare lo stesso con il gruppo ciclico C_n, generato dalla rotazione di $2\pi/n$. Concludere che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è omeomorfo a S^1.

Esercizio 2. Si consideri sullo spazio topologico euclideo $\mathbb{R}^2$ l'azione di $\mathbb{Z}^2$:

$$(m, n) * (x, y) = (x + m, y + n).$$

Dimostrare che lo spazio quoziente $R^2/\mathbb{Z}^2$ è omeomorfo al prodotto di due circonferenze $S^1 \times S^1$ (toro).

Considerare ora in $\mathbb{R}^3$ la superficie T (toro) di rotazione di una circonferenza giacente sul piano $y = 0$ e disgiunta dall'asse z intorno all'asse z. Dimostrare che T è omeomorfo al prodotto di due circonferenze $S^1 \times S^1$ (toro).

Esercizio 3. Si consideri l'ovvia azione di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^2$, data da $A*p = A(p)$. Provare che il quoziente $\mathbb{R}^2/\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ non è Hausdorff.

Esercizio 4. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e suriettiva. Provare che se X è separabile allora Y è separabile. Se f è anche aperta, provare che, se X ha una base numerabile, anche Y ha una base numerabile.

Esercizio 5. Si consideri la successione $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. In quali tra le topologie banale, cofinita, discreta, euclidea tale successione converge a 0?

Esercizio 6. Sia X uno spazio topologico con la topologia cofinita.

1. Sia $\{x_n\}_n$ una successione in X tale che per ogni $\overline{x} \in X$, esistono infiniti indici $m \in \mathbb{N}$ tali che $x_m \neq \overline{x}$. E' vero che ogni $x \in X$ è punto di accumulazione per tale successione?
2. Sia $\{x_n\}_n$ una successione in X tale che per ogni $\overline{x} \in X$, esistono un numero finito di indici $m \in \mathbb{N}$ tali che $x_m = \overline{x}$. Dimostrare che tale successione converge a ogni $x \in X$.

Esercizio 7. Sia X un insieme con infiniti elementi e sia $a \in X$ fissato. La famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X definita da:

$$A \in \mathcal{T} \iff A = \emptyset \text{ oppure } a \in A$$

definisce su X una topologia (questo non è da dimostrare).

1. Dimostrare che X non è uno spazio T_1.

2. Dimostrare che X soddisfa il primo assioma di numerabilità.
3. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione, dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali con la topologia euclidea. Dimostrare che f è continua se e solo se f è costante.
4. Dimostrare che X soddisfa il secondo assioma di numerabilità se e solo se X è un insieme numerabile.