Def: Sia A un anello, $(M,+)$ un gruppo abeliano, M è un A-modulo sinistro se $\exists$ funzione:

$$* \quad A \times M \longrightarrow M$$

$$\forall a \in A, \forall x \in M \quad (a, x) \longmapsto a * x$$

tale che. 1): $\forall x \in M$, $1_A * x = x$

2) $a, b \in A$, $x \in M$, $(a \cdot b) * x = a * (b * x)$

3). $(a+b) * (x+y)$
$= a*x + a*y + b*x + b*y$.

Def: M è un A-modulo destro se

$$\exists \bullet : M \times A \longrightarrow M$$

$$(x, a) \longmapsto x \bullet a$$

tale che. 1) $x \bullet 1_A = x$; 2) $x \bullet (a \cdot b) = (x \bullet a) \bullet b$

3): $(x+y) \bullet (a+b) = x \bullet a + x \bullet b + y \bullet a + y \bullet b$.

Def. Siano A e B anelli, $(M,+)$ gp. abeliano, M è un A-B bimodulo se M è A-mod. sinistro e B-mod. destro.

e.g. Sia V uno spazio vettoriale a coeff. in campo k,

V è un k-modulo

$\mathrm{End}_k V = \{$trasformazioni lin. su $V\}$

$$*: \mathrm{End}_k V \times V \longrightarrow V$$

$$(\tau, v) \longmapsto \tau(v) =: \tau * v$$

$\tau \in \mathrm{End}_k V$, $v \in V$

$*$ si definisce un $\mathrm{End}_k V$-mod. sinistro V.

e.g. fisso $\tau \in \mathrm{End}_k V$,

$$A = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \tau^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in k, 0 \le i \le n \right\}$$

A è un ~~sotto~~anello di $End_k V$.

$\Rightarrow$ V è un A-modulo sinistro

e.g. V spazio ~~vettoriale~~ $/ k$

$\dim_k V = n$.

Fissando una base di V, si ha

$$V = \{(a_1 a_2 \cdots a_n) \mid a_i \in k\}.$$

$M_n(k) := \{ n \times n \text{ matrici su } k \}$,

è un anello.

$$*: \quad V \times M_n(k) \longrightarrow V$$

$$\forall v \in V \quad \underset{(a_1 \cdots a_n)}{(v} \,,\, \underset{(x_{ij})_{n \times n}}{X)} \longmapsto \underset{(a_1 \cdots a_n)(x_{ij})}{v \cdot X}$$

$\forall X \in M_n(k)$,

$*$ si definisce V come un $M_n(k)$-modulo destro.

$\Rightarrow$ V è un k-$M_n(k)$ bimodulo.

e.g. Ogni anello A è un A-modulo sinistro / destro / bilatero in modo naturale

Def: 1) Sia M un A-modulo (sinistro o destro). Un ~~sotto~~modulo di M è un ~~sottoins.~~ $N \subseteq M$ tale N è A-modulo risp. all'operazione di M come A-modulo.

2) Siano M e N A-modulo. Un omomorfismo di A-modulo:

$f : M \to N$, t.c.

1) f è omomorf. di gp. $(M,+) \to (N,+)$

2) f è lineare: $\forall a \in A$, $\forall x \in M$, $f(ax) = af(x)$.

$\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$

Teo fond. di omomorfismi:

Dato $f : M \to N$ morfismo di A-modulo, allora

$\ker f$ è un ~~sotto~~mod. di M.

il quoziente $M/\ker f = \{x + \ker f \mid \forall x \in M\}$

è un A-mod. con:

$\forall a \in A, \quad a \cdot (x + \ker f) = ax + \ker f$.

$\exists f' : M/\ker f \to N$, tale che

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & f(M) \subseteq N \\ & M/\ker f \arrow[u, "f'"'] \end{tikzcd}$$

si com. f' è isomorf.

$\pi : M \to M/\ker f$

$x \mapsto x + \ker f$

Def.: Un A-modulo M è <u>semplice</u> se esso non ha alcun sottomodulo non-banale

Sia M un A-modulo, Siano N e N' due sottomoduli di M.

$$N+N' = \{a+a' \in M \mid \forall a \in N, \forall a' \in N'\}$$

$\subseteq M$

sottomodulo.

se $N \cap N' = \{0\} \Rightarrow N \oplus N'$

Siano $N_1, N_2, \dots, N_n$ A-moduli

Una somma diretta di $\{N_i\}_{i=1}^{n}$ è

è un A-modulo definito da:

1) Come ins. $N_1 \times \dots \times N_n$
2) " " gruppo abeliano:

$$(a_1, \dots a_n) + (b_1 \dots b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots a_n+b_n).$$

3) operaz. di Coeff:

$\forall a \in A$, $(a_1, \dots, a_n) \in N_1 \times \dots \times N_n$

$$a \cdot (a_1, \dots a_n) = (a a_1, a a_2, \dots, a a_n)$$

Si scrive $N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_n$.

<u>Prop</u>: Siano $N_1, \dots, N_n$ ~~sotto~~sottomoduli di M allora

$$N_1 + N_2 + \dots + N_n = N_1 \oplus \dots \oplus N_n$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n, \quad N_i \cap \sum_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \neq i}} N_j = \{0\}$$

<u>Prop</u>: Sia A un anello e Sia $(M, +)$ un gruppo abel. allora M è un A-modulo $\Longleftrightarrow$ $\exists$ un morfismo di anello: $\varphi : A \to \operatorname{End} M$.

(atten. $\varphi(1_A) = id_M$)

<u>Dim</u>: "$\Rightarrow$" M A-mod.

i.e. $* : A \times M \longrightarrow M$
$(a, x) \longmapsto a * x$

def: $\varphi_* : A \to \operatorname{End} M$
$\forall a \in A, \quad a \longmapsto \varphi_*(a) : M \to M$
$\forall x \in M, \quad x \mapsto a * x$

$\Rightarrow \varphi_*$ è un morf. di anello.

"$\Leftarrow$" Sia $\varphi_\circ : A \to \operatorname{End} M$ morfismo.

def: $A \times M \xrightarrow{\cdot} M$
$(a, x) \longmapsto a \cdot x := \varphi_\circ(a) \cdot (x) \in M$

$\Rightarrow$ "$\cdot$" è un'operaz. di coeff. per M.
$\Rightarrow M$ è un A-mod. (via $\varphi_\circ$).

<u>Cor</u>: $\exists$ corrisp. 1-1:
$\{A\text{-moduli } M\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \operatorname{Hom}(A, \operatorname{End} M)$
$\{\text{morfismi } f : M \to \operatorname{End} M\}$

Eser.