Istituzioni di Algebra. 2023–24
Teoria di Galois - Problemi d'esame

Problema 1. *Sia K un campo contenuto in $\overline{\mathbb{Q}}$, e $a \in K$. Descrivere il campo di spezzamento e il gruppo di Galois su K del polinomio $X^3 - a$ nelle seguenti situazioni:*

a) K contiene una radice primitiva terza dell'unità e a è un cubo in K.

b) K non contiene una radice primitiva terza dell'unità e a è un cubo in K.

c) K contiene una radice primitiva terza dell'unità e a non è un cubo in K.

d) K non contiene una radice primitiva terza dell'unità e a non è un cubo in K.

Problema 2. *Sia ζ una radice primitiva ottava dell'unità, e $K = \mathbb{Q}(\zeta)$.*

a) Determinare gli elementi del gruppo $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ e costruirne la tavola di moltiplicazione.

b) Classificare il gruppo $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ e determinarne il reticolo dei sottogruppi.

c) Determinare il reticolo dei campi intermedi dell'estensione $K/\mathbb{Q}$ e per ognuno di essi determinare un generatore.

d) Per ogni campo intermedio trovato al punto c), determinare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$.

Problema 3. *Si ricorda che un sottogruppo H di S_n è* transitivo *se per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ esiste $\sigma \in H$ tale che $\sigma(i) = j$.*

a) Sia K un campo e $f(X) \in K[X]$ un polinomio di grado n senza radici ripetute nel suo campo di spezzamento L. Dimostrare che se $\mathrm{Gal}(L/K) \subseteq S_n$ è transitivo, allora $f(X)$ è irriducibile.

b) Determinare i sottogruppi transitivi di S_3; per ogni sottogruppo trovato H, determinare un polinomio $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ il cui gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ è H.

c) Dimostrare che tutti i sottogruppi transitivi di S_4 sono coniugati a uno dei seguenti:

$$V_4 =< (12)(34), (13)(24) >, \quad C_4 =< (1234) >,$$

$$D_4 =< (1234), (13) >, \quad A_4, \quad S_4.$$

d) Elencare i possibili gruppi di Galois di polinomi riducibili di quinto grado in $\mathbb{Q}[X]$ senza radici ripetute.

Problema 4. *Sia K un campo di caratteristica $p > 0$ e $a \in K$ un elemento tale che il polinomio $f_a(X) = X^p - X - a$ è irriducibile in $K[X]$. Sia α una radice di $f_a(X)$ in un'estensione L/K.*

a) Provare che $\alpha + m$ è radice di $f_a(X)$ per ogni $m \in \mathbb{Z}_p$.

b) Dimostrare che $K(\alpha)$ è un campo di spezzamento di $f_a(X)$ su K.

c) Dimostrare che $K(\alpha)/K$ è di Galois.

d) Dimostrare che $\mathrm{Gal}(K(\alpha)/K)$ è ciclico di ordine p.

e) Dimostrare che se $f_a(X)$ è riducibile allora $a = b^p - b$ per qualche $b \in K$.

f) [1] *Dimostrare che se L/K è un'estensione ciclica di Galois di grado p, allora L è il campo di spezzamento su K di un polinomio irriducibile della forma $f_a(X)$.*

Problema 5. *Sia $K \subseteq L \subseteq M$ una torre di estensioni finite in $\mathbb{Q}$. Si ricordi che la* chiusura di Galois *di un'estensione L/K è la più piccola estensione di L che è di Galois su K.*

a) Dimostrare che la chiusura di Galois di M/K contiene la chiusura di Galois di M/L.

b) Dare un esempio in cui M/L e L/K sono di Galois ma M/K non è di Galois.

c) Dare un esempio in cui la chiusura di Galois di M/K è più grande della chiusura di Galois di M/L.

[1] Facoltativo