Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 6 - 7 Novembre 2023

Esercizio 1. Dire quali tra questi spazi topologici (con la topologia euclidea) sono tra loro omotopicamente equivalenti, motivando la risposta:

1. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
3. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$
4. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Esercizio 2. Siano A e B due sottospazi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea. Dire se la seguente affermazione è vera o falsa, dando una dimostrazione o un controesempio:

Se A e B hanno lo stesso tipo di omotopia, allora i complementari $\mathbb{R}^2 \setminus A$ e $\mathbb{R}^2 \setminus B$ hanno lo stesso tipo di omotopia.

Esercizio 3.

1. Dimostrare che: se X e Y sono spazi topologici contraibili, allora lo spazio prodotto $X \times Y$ è contraibile. E' vero anche il viceversa?
2. Siano X e Y spazi topologici contraibili. L'unione $X \cup Y$ è sempre contraibile?

Esercizio 4. Sia $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ la circonferenza unitaria, $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ il disco unitario, e $X := S^1 \times D^2$, con la topologia euclidea. Stabilire se i seguenti sottospazi sono retratti e/o retratti di deformazione di X.

1. $A := S^1 \times \{(0, 0)\}$
2. $B := \{(1, 0)\} \times D^2$

Esercizio 5. Considerare le lettere dell'alfabeto maiuscolo A, B, C ... come sottospazi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia eucliea. Suddividerle in classi di equivalenza omotopica.

Esercizio 6. Sia X uno spazio topologico e $f : S^1 \to X$ una funzione continua. Dimostrare che f è omotopa ad una funzione costante se e solo se esiste una funzione continua $g : D^2 \to X$ tale che $g_{|_{S^1}} = f$.

Esercizio 7. Sia $A \subseteq Y$, con Y spazio di Hausdorff. Se A è un retratto di Y, dimostrare che A è chiuso in Y.

Esercizio 8. In $\mathbb{R}^n$, con la topologia euclidea, si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$X := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \neq 0\}, \qquad Y := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}.$$

1. Mostrare che X è un aperto di $\mathbb{R}^n$, che è sconnesso, e determinarne le componenti connesse.
2. Si consideri la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^n$ definita da:

   $$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y;$$

   mostrare che lo spazio quoziente $\mathbb{R}^n / \sim$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$.