Sia A un anello, Siano M e N A-moduli.

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) := \{ f : M \to N \mid f \text{ morfismo di } A\text{-mod} \}$$

Definisco: "+":

$\forall f, g \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, $\forall x \in M$.

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x).$$

operaz. di "coeff":, $\forall a \in A$, $x \in M$, $\forall f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$

$$(a \cdot f)(x) := a \cdot f(x)$$

$\Rightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N)$ è un A-modulo.

Prop.: Siano M, M', N, N' A-moduli, allora $\exists$ isomorfismi:

1) $\mathrm{Hom}_A(M \oplus M', N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N) \oplus \mathrm{Hom}(M', N)$

2) $\mathrm{Hom}_A(M, N \oplus N') \cong \mathrm{Hom}_A(M, N) \oplus \mathrm{Hom}_A(M, N')$.

In genere: Siano $\{M_i\}_{i \in I}$, $\{N_j\}_{j \in J}$.

$|I| < \infty$, $|J| < \infty$: insiemi di A-moduli.

$$\mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{\forall i \in I} M_i, \bigoplus_{\forall j \in J} N_j\right) \cong \bigoplus_{\substack{\forall i \in I \\ \forall j \in J}} \mathrm{Hom}_A(M_i, N_j).$$

Dim: 1): $\left.\begin{array}{l} M \to M \oplus M' \\ \forall x \in M, x \mapsto (x, 0) \end{array}\right\}$ monomorf. di A-modulo $\Rightarrow M$ è un sottomod di $M \oplus M'$ a meno isomorf.

$$\mathrm{Hom}_A(M \oplus M', N) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_A(M, N) \oplus \mathrm{Hom}_A(M', N).$$

$$f \longmapsto (f|_M, f|_{M'})$$

φ è un morf. di A-modulo

$$\mathrm{Hom}_A(M\oplus M', N) \xleftarrow{\psi} \mathrm{Hom}_A(M,N) \oplus \mathrm{Hom}_A(M',N)$$

$$f+g \longleftarrow\!\shortmid (f, g)$$

$$M\oplus M' \longrightarrow N$$

$$(x, y) \longmapsto (f+g)(x,y) := f(x) + g(y)$$ $\Big\}$ $f+g$ è ben-def.

$$\varphi \circ \psi = id_{\mathrm{Hom}_A(M,N)\oplus \mathrm{Hom}_A(M',N)}.$$

$$\psi \circ \varphi = id_{\mathrm{Hom}_A(M\oplus M', N)}. \quad \boxed{\checkmark}.$$

2) eser.

Siano $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ins. A-moduli.

Un sequenza esatta è

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots$$

$f_j : M_{j-1} \to M_j$ morfismi di A-mod.

tali che: $\mathrm{Im} f_i = \ker f_{i+1}$. $\forall i \in \mathbb{N}$.

Una sequenza esatta corta:

$$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N' \to 0$$

N, N', M sono A-moduli.

f, g morf. di A-moduli e

$$\ker g = \operatorname{Im} f$$

dove: f è iniettivo e g è suriettivo

e.g. $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}$-modulo, $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \to n\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

$$na \longmapsto na$$

$$\operatorname{Im} \iota = \ker \pi = n\mathbb{Z}.$$

$$0 \to n\mathbb{Z} \xrightarrow{f} n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

$\forall a \in \mathbb{Z}$. $\quad na \longmapsto (na, \bar{0})$

$(x, y) \overset{g}{\longmapsto} y$, $\forall x \in n\mathbb{Z}$, $\forall y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

f iniett., $\operatorname{Im} f = \ker g$

g suriett.

e.g. $0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_4/\{\bar{0},\bar{2}\} \cong \mathbb{Z}_2 \to 0$

$$\begin{aligned} \bar{0} &\longmapsto \bar{0} \\ \bar{1} &\longmapsto \bar{2} \end{aligned}$$

f iniett. g suriett. $\operatorname{Im} f = \ker g$.

$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f'} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{g'} \mathbb{Z}_2 \to 0$

$$\bar{a} \longmapsto (\bar{a}, \bar{0})$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto \bar{b}$$

f' iniett. g' suriett. $\operatorname{Im} f' = \ker g'$.

$*$: $\mathbb{Z}_4 \not\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

$*$: Data una sequenza esatta

$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N' \to 0$.

$\Rightarrow N' \cong M/\ker g = M/\operatorname{Im} f$

$M \overset{?}{\cong} N \oplus N'$.

Prop: Sia $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N' \to 0$

una sequenza esatta dei A-moduli,

Sono equivalenti:

1) $\exists\, \varphi : N' \to M$ morf. di A-modulo

tale che

$$g \cdot \varphi = id_{N'}.$$

2) $\exists\, \psi : M \to N$ morf. di A-mod.

tale che

$$\psi \cdot f = id_N.$$

Se vale 1) opp. 2) allora

$$M = \operatorname{Im} f \oplus \ker \psi = \operatorname{Im} \varphi \oplus \ker g$$

$$\cong N \oplus N'.$$

Dim: Se vale 1) $\xRightarrow{\text{Tesi}}$ $M = \operatorname{Im} \varphi \oplus \ker g$.

$\forall x \in M$, $g(x - \varphi(g(x))) = g(x) - \underbrace{g(\varphi}_{id_{N'}}(g(x)))$

$$= g(x) - g(x) = 0$$

$$x - \underbrace{\varphi(f(x))}_{\in \operatorname{Im}\varphi} \in \ker g$$

$$\Rightarrow \quad x \in \ker g + \operatorname{Im}\varphi$$

$$M \subseteq \ker g + \operatorname{Im}\varphi$$

$$M = \ker g + \operatorname{Im}\varphi .$$

per $y \in \ker g \cap \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists\, x \in N',\ y = \varphi(x)$

$$0 = g(y) = \underbrace{g(\varphi}_{id_{N'}}(x)) = x \quad \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = \ker g \oplus \operatorname{Im}\varphi .$$

eser: $M = \operatorname{Im}\varphi \oplus \ker g \Rightarrow$ vale 2).

i.e. 1) $\Rightarrow$ 2).

Vice versa: 2) $\Rightarrow M = \operatorname{Im} f \oplus \ker \psi$

$\Rightarrow$ 1).

$\boxed{\text{q}}$

Un anello A <u>P.I.D</u>, cioè:
dominio di integrità pricipale.

e.f. Sia A un PID. (commutativo).
allora ogni sottomod. di un A-modulo libero è libero (con rango finito).

<u>Dim</u>. l'induzione su rango del modulo:

$n = 1$, $\underset{\text{libero}}{M = Ax}$, Sia $\underset{\text{sottomod}}{N \subseteq Ax}$.

$$I_N := \{a \in A \mid ax \in N\} \trianglelefteq A$$

$$\Rightarrow N = I_N \cdot x = \{ax \mid \forall a \in I_N\}.$$

A PID. $I_N = \langle a \rangle$, per $a \in A$
$= Aa$

$$\Rightarrow N = Aax$$

$$\mathrm{Ann}_A\, ax = \{0\} \xRightarrow[\text{criterio}]{} Aax \text{ è libero}$$

Per $n > 1$. Sia $N \subseteq M = \bigoplus_{i=1}^{n} Ax_i$ libero di rango n

se $N \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n-1} Ax_i \Rightarrow N$ libero per l'ipotesi dell'induzione.

se $N \not\subseteq \bigoplus_{i=1}^{n-1} Ax_i = M_1$.

$N_1 = N \cap M_1$ è libero per l'ipotesi dell'induz.

$\Rightarrow N_1 = \bigoplus_{i=1}^{m} Ay_i$ libero di rango $m \leq n-1$

$P_n : \bigoplus_{i=1}^{n} Ax_i \to Ax_n$ } morf. di A-mod. suriett.

$a_i \in A$, $(a_1x_1, a_2x_2, \dots a_nx_n) \longmapsto a_nx_n$

$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i$

$\Rightarrow \underbrace{P_n(N)}_{\text{Sottomod di } Ax_n} \neq \{0\} \Rightarrow P_n(N) = Aax_n$ per. q.c. $a \in A$

$\Rightarrow \exists\, y_m \in N$, $y_m = x + ax_n$ per. q.c. $x \in M_1$

Per $y \in N$, si ha $y = x' + bax_n$ per

q.c. $x' \in M_1$, e $b \in A$

$$\underbrace{y - by_m}_{\in N} = x' + \underline{bax_n} - \underline{b}(x + \underline{ax_n}) = x' - bx \in M_1$$

$$y - by_m \in N \cap M_1 = N_1$$

$$\Rightarrow y \in N_1 + Ay_m$$

$$N_1 \cap Ay_m = 0 \Rightarrow \oplus$$

$$\Rightarrow N \subseteq N_1 \oplus Ay_m$$

$$\Rightarrow N = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{libero}}}{N_1} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{libero}}}{Ay_m}.$$

$\Rightarrow N$ è libero. Come somma diretta di moduli libero

$\boxed{\text{c.v.d.}}$