e.g. Sia A un P.I.D., ogni sottomod. di un A-modulo finitamente generato è finitamente generato.

Dim: Sia $\{x_1, \dots x_n\}$ generatori di ~~un sottomod N~~ $\subseteq M$, dove M fin. gen. A-mod.,

Sia $N \subseteq M$ un sottomod:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi : A^n \longrightarrow M \\ (a_1, a_2 \dots a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \\ a_i \in A \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{morf. di} \\ \text{A-moduli} \\ \text{suriett.} \end{array}$$

$$\underset{\text{sottomod.}}{\varphi^{-1}(N) \subseteq A^n} \Rightarrow \varphi^{-1}(N) \text{ libero}$$

Sia $\{y_1, \dots, y_r\}$ una base di $\varphi^{-1}(N)$.

$$\varphi(\varphi^{-1}(N)) = N$$

$\Rightarrow \{\varphi(y_1), \dots, \varphi(y_n)\}$ gen. di N. $\square$

Def: A PID, M un A-mod.

un $x \in M$, x è di <u>torsione</u>

se $\exists\, a \in A \setminus \{0\}$, t.c. $ax = 0$:

$$\mathrm{Ann}_A(x) = \{a \in A \mid ax = 0\} \lhd A$$
$$= \langle b \rangle = Ab \quad \text{per. q.c. } b \in A$$

b è l'ordine di x.

se $b = 0$, x è <u>torsione-libero</u>

M è di torsione se ogni $x \in M$ è di torsione.

M è di torsione libero se ogni elem. di M è torsione libero

Se M è di torsione:

$$\mathrm{Ann}_A M = \{a \in A \mid aM = \{0\}\} \lhd A$$

$\mathrm{Ann}_A M = \langle c \rangle$, c = l'ord. di M.

* M è torsione-libero $\Rightarrow \mathrm{Ann}_A M = \{0\}$.

e.g. $M = \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}_n$ un $\mathbb{Z}$-modulo

ogni elem. di M è di torsione.

$Ann_A M = \{0\}$.

Prop. Sia A PID. Ogni A-mod. fin. gen. e torsione-libero è un modulo libero.

Dim. M un A-mod. torsione-libero fin. gen. Sia $\{x_1, \dots, x_m\}$ un ins. di generatori di M

Sia $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$ un ~~sotto~~ins. mass. di elementi lin. indipendenti.

$\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} A y_i$ è libero $\subseteq M$.

$\forall 1 \le i \le m$, $\{x_i, y_1, \dots, y_n\}$ lin. dip.

i.e. $b_i x_i + \sum_{j=1}^{n} a_j y_j = 0$, $b_i \neq 0$.

$b_i x_i \in \bigoplus_{i=1}^{n} A y_i$, $i = 1, \dots, m$.

$b = b_1 \cdot b_2 \cdots b_m \in A$, $b x_i \in \bigoplus_{i=1}^{n} A y_i$

$$bM \leq \underbrace{\bigoplus_{i=1}^{n} A y_i}_{\text{sottomod.}} \subseteq M$$

$\Rightarrow bM$ è A-mod. libero

$\varphi : M \longrightarrow bM$, $\forall x \in M$, $x \longmapsto bx$. } morf. di A-mod suriett.

$\ker \varphi = \{x \in M \mid bx = 0\}$.
$= \{0\}$ perché M è ~~tors.~~ libero.

$\Rightarrow \varphi$ è un isomorf. + bM libero

$\Rightarrow M$ è libero.

$\boxed{///}$

Sia M un A-modulo,

$$M_{tor} := \{ x \in M \mid x \text{ è di torsione} \} \underset{\text{Sottomod}}{\subseteq} M$$

M/M_{tor} è A-mod. di torsione libero.

<u>Prop</u>: Sia A PID e sia M A-mod. fin. generato. allora.

$M = M_{tor} \oplus N$ dove N è un sottomod di torsione libero ($*$ $N \cong M/M_{tor}$).

<u>Dim</u>. $0 \to M_{tor} \xrightarrow{\iota} M \underset{\varphi}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} M/M_{tor} \to 0$

$\varphi : M/M_{tor} = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^{n} A x_i}_{A\text{-mod libero}} \longrightarrow M$ per ogni $1 \leq i \leq n$, scegliere un $y_i \in \pi^{-1}(x_i)$

$x_i \longmapsto \varphi(x_i) := y_i$

$\forall\, 1 \leq i \leq n$.

Si estende φ ad un morfismo.
da $\bigoplus A x_i$ in: M.

$$\pi \circ \varphi = id_{M/M_{tor}} \overset{\text{criterio}}{\Longrightarrow} M = M_{tor} \oplus \mathrm{Im}\,\varphi$$

$$\varphi : M/M_{tor} \longrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi < M.$$

è un isomorf.

$$N := \mathrm{Im}\,\varphi \Rightarrow M = M_{tor} \oplus N$$

e.g.: $(G, +)$ gruppo finitamente generato. $\Rightarrow$ G è un $\mathbb{Z}$-modulo

$$\Rightarrow \quad G = G_{tor} \oplus G_{libero}$$

$$|G_{tor}| < \infty, \quad G_{libero} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{< \infty}.$$

Sia A PID, M A-mod. di ~~torsione~~ fin. generato:

$$\mathrm{ord}\, M = \underset{\underset{A}{\cap}}{t} = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m},$$

p_i sono elem. prim. in A.
$r_i \in \mathbb{N}$

$\forall\, a, b \in A$, PID, ideale generato da a e b. $\langle a, b\rangle = \langle d \rangle$.
$$\langle a, b\rangle \overset{\parallel}{\ } Aa + Ab$$

d è mass. com. div. di a e b.

$$M_a := \{ x \in M \mid ax = 0 \} \underset{\text{sottomod}}{\subseteq} M.$$

<u>Prop</u>: Se l'ord. M è $t = a \cdot b$, $a, b \in A$ dove $\langle a, b \rangle = A$.
allora $M = M_a \oplus M_b$.

<u>Dim</u>. Per l'identità di Bézout.

$\exists\, s_1, s_2 \in A$, t.c.

$$s_1 a + s_2 b = 1_A = \operatorname{mcd}(a, b).$$

$\forall x \in M$,

$$x = 1_A x = (s_1 a + s_2 b) x$$
$$= \underbrace{s_1 a x}_{\in M_b} + \underbrace{s_2 b x}_{\in M_a}.$$

$$\Rightarrow M = M_a + M_b$$

$\forall y \in M_a \cap M_b$

$$y = (s_1 a + s_2 b) y = \underbrace{s_1 a y}_{0} + \underbrace{s_2 b y}_{0}$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow M = M_a \oplus M_b.$$

$\square$

Prop: A PID. M A-Mod. fin. gen.

Con $\operatorname{ord} M = r = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m}$ dove

p_i, p_j sono coprimi $\forall\, i \neq j$.

allora
$$M = \bigoplus_{i=1}^{m} M(p_i)$$

dove $M(p_i) = \{x \in M \mid \exists\, r \in \mathbb{N},\ p_i^r \cdot x = 0\}$

Dim. Usa l'induzione su m.

$\boxed{\text{eser}}$. $\boxed{///}$.