Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 7 – a.a. 2023-24

Da consegnare: lunedì 20 novembre

Esercizio 1. (Manetti, Esercizio 11.11.) Provare che ogni applicazione continua omotopa ad un'applicazione costante induce l'omomorfismo nullo tra i rispettivi gruppi fondamentali.

Esercizio 2. (Manetti, Es. 11.1.) Provare che i due cammini $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$

$$\alpha(t) = (1+t)(\sin(8t), \cos(8t)), \qquad \beta(t) = (1+t^2)(\sin(8t), \cos(8t))$$

sono omotopi.

Esercizio 3. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea e siano $r, s \subset \mathbb{R}^3$ due rette distinte.

1. Mostrare che $X := \mathbb{R}^3 \setminus r$ è omotopicamente equivalente a S^1.
2. Mostrare che $Y = \mathbb{R}^3 \setminus (r \cup s)$ è omotopicamente equivalente a un bouquet di 2 o 3 circonferenze, a seconda della posizione delle due rette.

Suggerimento per il punto 2: se le rette sono disgiunte, a meno di omeomorfismo possiamo supporre che siano parallele. Se invece le rette si intersecano, possiamo considerare una sfera S centrata nel punto di intersezione P, e mostrare che $S \setminus (r \cup s)$ è retratto di deformazione di Y.

Esercizio 4. Sia $X = (0, 1)$ con la metrica euclidea. Determinare un ricoprimento aperto di X per cui non esiste un numero di Lebesgue.

Esercizio 5. Sia Z uno spazio topologico e siano $f, g \colon Z \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, dove $\mathbb{R}$ ha la topologia euclidea. Mostrare che le due funzioni

$$\max(f, g) \colon Z \longrightarrow \mathbb{R}, \; z \mapsto \max(f(z), g(z))$$
$$\min(f, g) \colon Z \longrightarrow \mathbb{R}, \; z \mapsto \min(f(z), g(z))$$

sono continue.

Suggerimento (per il massimo, il minino è analogo): mostrare anzitutto che la funzione massimo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua.

Esercizio 6. *(Facoltativo, di approfondimento.)*(Manetti, Es. 10.24.) Siano X e Y due spazi topologici. Mostrare che X e Y sono omotopicamente equivalenti se e solo se X e Y sono isomorfi nella categoria KTOP avente per oggetti gli spazi topologici e per morfismi le classi di omotopia di mappe continue.