Def: Sia A un anello. L'opposto di A è un anello definito: A^o

1): insieme $A^o := A$

2) $(A^o, +) := (A, +)$

3) $\forall a, b \in A^o$, il prodotto "$\circ$" in A^o

$a \circ b := b \cdot a$

Prop: Sia A un anello, allora $A^o \cong \mathrm{End}_A A$ dove A come A-mod sinistro.

Dim. Per $a \in A$, def: $\left.\begin{array}{l} \varphi_a : A \to A \\ \forall x \in A, \ x \mapsto x a \end{array}\right\}$

$\forall b \in A, x \in A,$

$\varphi_a(bx) = bxa = b(xa) = b \cdot \varphi_a(x)$

$\Rightarrow \varphi_a$ è un morf. di A-mod. sinistro.

$\varphi_a \in \mathrm{End}_A A$.

$\forall \varphi \in \mathrm{End}_A A$, $\forall x \in A$,

$\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1_A) = x \cdot \varphi(1_A) = xa$

se. $\varphi(1_A) = a \in A$,

$= \varphi_a(x)$.

$\Rightarrow \mathrm{End}_A A = \{\varphi_a \mid \forall a \in A\}$.

$\sigma: A^o \longrightarrow \mathrm{End}_A A$ } morfismo di anello. suriett.

$\forall a \in A^o$, $a \longmapsto \varphi_a$

$\forall a, b \in A^o$, $\sigma(a+b) = \varphi_{a+b} = \varphi_a + \varphi_b$.

$\sigma(a \circ b) = \varphi_{a \circ b} = \varphi_{ba} = \varphi_a \cdot \varphi_b = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$

$\ker \sigma = \{a \in A^o \mid \varphi_a = 0\} = \{0\}$.

$\forall x \in A$, $0 = \varphi_a(x) = x \cdot a \Rightarrow a = 0$.

$\Rightarrow \sigma$ è un isomorfismo. $\square$.

Prop. Un anello A è decomponibile come una somma diretta degl'ideali bilatero $\Longleftrightarrow$ A contiene un idempotente non-banale centrale.

* il centro di A : $C(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}$

Dim "$\Rightarrow$" Se $A = A_1 \oplus A_2$, A_i ideali bilatero di A. $1_A = e_1 + e_2$, $\exists$: $e_1 \in A_1$, $e_2 \in A_2$

$$e_1 e_2 \in A_1 \cap A_2 = \{0_A\}$$

$$\Rightarrow e_1 \cdot e_2 = 0 = e_2 e_1$$

$$\underline{e_1 + e_2} = 1_A = (e_1 + e_2)^2 = \underline{e_1^2 + e_2^2} + 2\underbrace{e_1 e_2}_{=0}$$

$$A_1 \ni e_1^2 - e_1 = e_2^2 - e_2 \in A_2$$

$$\Rightarrow e_1^2 - e_1 = 0 = e_2^2 - e_2$$

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2 .$$

$$A_1 = A_1(e_1+e_2) = A_1e_1 + \underbrace{A_1e_2}_{\{0\}} = A_1e_1$$
$$= \underbrace{A}_{A_1\oplus A_2} e_1 .$$
$$\{A_2 \cdot e_1 = \{0\},$$

Simile $A\cdot e_2 = A_2 e_2$

$e_1 = 1_{A_1}$: perché: $\forall x \in A_1 = A_1 e_1$
$\Rightarrow x = a e_1$, per $a \in A_1$.

$x e_1 = a e_1 e_1 = a e_1^2 = a e_1 = x$.

Simile $e_1 x = x$, $\forall x \in A_1$.

Simile $e_2 = 1_{A_2}$.

e_1 e e_2 sono centrale:

$\forall a \in A = A_1 \oplus A_2$, $a = a_1 + a_2$, $a_i \in A_i$, $i = 1,2$.

$$\underline{a\cdot e_1} = (a_1+a_2)e_1 = \underline{a_1 e_1} + \underbrace{a_2 e_1}_{0}$$
$$= e_1 a_1 + \underbrace{e_1 a_2}_{0} = e_1 \cdot a .$$

Simile per $e_2 \in C(A)$.

"$\Leftarrow$" Se $e \in A$ idempotente centrale.

$\Rightarrow A = Ae \oplus A(1_A - e)$

<u>Prop</u>: Un anello A è decomponibile come una somma diretta di un num. fin. degl'ideali indecomponibile $\Longleftrightarrow$ A contiene un ins. degli idempotenti centrale ortogonale e completo, e <u>primitivo</u> - <u>centrale</u>.

(III).

e.g. $\mathbb{Z}$, come anello, è decomponibile?
$F[X]$ anello di polinomi dove F è un anello senza l'idempotente, è decomponibile?

e.g. $M_n(F)$, F campo.

$$1 \le i \le n, \quad E_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \; i \quad \text{idempotente Non-centrale.}$$

il centro di $M_n(F) = C(M_n(F)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} \middle| \forall a \in F \right\}$

$$C(M_n(F)) \ni \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix}^2 \overset{se}{=} \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 = a$$

$$\Rightarrow a = 0, 1.$$

$\Rightarrow$ $M_n(F)$ Non ha alc. idempotente centrale. $\Rightarrow$ Non è decomponibile come anello.

$\boxed{\text{Eser}}$ $A = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

$A_1 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\} \subseteq A$ ideale

$A = A_1 \oplus \mathbb{Z}_2$

Eser: A anello, Siano

$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, dove $A_i \triangleleft A$ bilatero indecomponibile

$= B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ dove $B_j \triangleleft A$ indecomponibile.

Dimostrare che $n = m$

e $\exists\, \sigma \in S_n$, t.c.

$\forall\, 1 \leq i \leq n$, $B_i \cong A_{\sigma(i)}$. isomorf. di anelli e.g. V spazio vett. $/F$,

$End_F V$ anello, V è $End_F V$-modulo.

<u>DIM</u> $\Rightarrow$ V è un $End_A V$ -mod semplice.

e.g. $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \forall x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

Verificate. $M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\left(X ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto X \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

$\mathbb{R}^2$ come $M_2(\mathbb{R})$-mod ~~non~~ è semplice.

e di conseguenza indecomponibile.

e.g. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \underset{\text{Sotto anello}}{\subseteq} M_2(\mathbb{R})$

$\mathbb{R}^2$ è un A-modulo. Sinistro.

$\mathbb{R} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \forall a \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-spaz.

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \forall x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

è un A-sottomodulo $\Rightarrow \mathbb{R}^2$ Non è un mod. semplice

Tesi: $\mathbb{R}^2$ è A-mod indecomponibile.

ossia: $\exists$? idempotenti in $\mathrm{End}_A \mathbb{R}^2$.

Sia $\varphi \in \mathrm{End}_A \mathbb{R}^2 \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 \cong M_2(\mathbb{R})$

$\forall \varphi \in M_2(\mathbb{R})$, $\forall X \in A$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi \in \mathrm{End}_A \mathbb{R}^2 \Rightarrow \varphi(Xv) = X \cdot \varphi(v).$$

$$\varphi \cdot X \cdot v = X \cdot \varphi \cdot v$$

$$\Rightarrow (\varphi X - X\varphi) v = 0$$

$$\varphi X - X\varphi \in \mathrm{Ann}_{M_2(\mathbb{R})} \mathbb{R}^2 = \{0\}$$

$$\Rightarrow \varphi X = X\varphi, \quad \forall X \in A$$

$$\Rightarrow \varphi \in \text{Centro di } A$$

$$\text{Centro} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \forall a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \forall a \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ per q.c. $a \in A$.

φ idempotente $\Leftrightarrow a^2 = a \Leftrightarrow a = 0, 1$

$\Rightarrow \mathrm{End}_A \mathbb{R}^2$ Non contiene alc. idempotente non-banale.

$\Rightarrow \mathbb{R}^2$ non è decomponibile come A-modulo. (II)

Eser $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid \forall \sim \in \mathbb{R} \right\}$

è indecomponibile come anello. (#)