Prop: (Lemma di Schur)

Sia A un anello e M un A-modulo semplice, allora $\mathrm{End}_A M$ è un corpo.

Dim: $\mathrm{End}_A M$ è un anello.

Sia $\varphi \in \mathrm{End}_A M \setminus \{0\}$

$$\varphi(M) \subseteq M \xRightarrow{M \text{ sempl.}} \varphi(M) = M$$

φ suriett.

$$\ker\varphi \subseteq M \Rightarrow \ker\varphi = \{0\}$$

$\Rightarrow \varphi$ iniett.

$\Rightarrow \varphi$ isomorf. i.e. invertibile

(Ju)

e.g. $V = \mathbb{C}^n$, $A = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n \cong M_n(\mathbb{C})$

V è un A-modulo

*: per ogni $u, v \in V$, esiste

$\sigma \in A$ t.c. $\sigma(u) = v$.

$\Rightarrow$ V è un A-modulo Semplice.

$\mathrm{End}_A V = ?$

Sia $\tau \in \mathrm{End}_A V \Rightarrow \tau$ è una trasf. lin. sullo spaz. vett. V

$\Rightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di τ.

I = funz. ident. su V.

$(\lambda I - \tau) \in \mathrm{End}_A V$. Sia $v \in V$ autovett. risp. a λ.

$(\lambda I - \tau) v = 0$ i.e. $\tau(v) = \lambda v$.

$\ker(\lambda I - \tau) \supsetneq \{0\}$. $v \neq 0$.

$\mathrm{End}_A V$ è un Corpo (Lemma di Schur).

$$\Rightarrow \lambda I - \tau = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \lambda I.$$

$$\Rightarrow \mathrm{End}_A V = \{\lambda I \mid \forall \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

$$\cong \mathbb{C}$$

Def: Un A-modulo M è Semisemplice se è una somma diretta dei sottomoduli semplici.

$$M = \bigoplus_{\forall i \in I} M_i$$

dove M_i sono A-moduli semplici $\forall i \in I$.

Prop: Sia M un A-mod. ~~semisemplice~~

Sono equivalenti:

1) M semisemplice

2) $M = \sum_{\forall i \in I} N_i$, dove N_i semplice sottomodulo

3) ogni sottomodulo $N \subseteq M$ è un addendo, i.e. $\exists N' \subseteq M$ t.c. $M = N \oplus N'$.

Dim: 1) $\Rightarrow$ 2) ✓

2) $\Rightarrow$ 3). $N \underset{\text{sottomod.}}{\subseteq} M$

$$P = \left\{ \sum_{\forall j \in J} N_j \;\middle|\; J \subseteq I,\ \sum_{j \in J} N_j = \bigoplus_{\forall j \in J} N_j,\ N \cap \sum_{j \in J} N_j = \{0\} \right\}.$$

P è parzialmente ord. induttivo

i.e. Per ogni sottoins. ~~tot.~~ ord.

$\exists$ un maggiorante.

$\xRightarrow{\text{Zorn}}$ P contiene un elem. mass.

$N' \subseteq M$.

$M = N \oplus N'$. eser ✓

$\boxed{\text{Cor } 2) \Rightarrow 1)}$: si prende $N = \{0\}$ nella dimostraz.

$3) \Rightarrow 1)$:

Lemma: Ogni A-mod ciclico contiene un sottomodulo massimale.

Dim: $P = \{$ sottomoduli propri di $Ax \}$

P è parz. ord. e induttivo

$\Rightarrow \exists$ elem mass. $N \subset Ax$

Sia $\{N_i\}_{i\in I}$ ins. di tutti

i ~~sottomod.~~ semplici di M

$$M \supseteq M' = \sum_{\forall i \in I} N_i \overset{cor(2\Rightarrow 1)}{\Longrightarrow} M' \text{ è semisemplice}$$

Se $M \underset{\neq}{\supsetneq} M'$, $\exists\, x \in M \setminus M'$

$$M \supseteq Ax \underset{\substack{\text{sottomod.}\\ \text{mass.}}}{\supset} N \overset{\exists N' \subseteq M}{\Longrightarrow} M = N \oplus N'$$

$$\Rightarrow \quad Ax = N \oplus (Ax \cap N')$$

$$M \supseteq N'' = Ax \cap N' \cong Ax/N \quad \text{semplice A-mod.}$$

$$\Rightarrow N'' \in \{N_i\}_{i\in I} \quad \text{assurdo}$$

$$\Rightarrow M = M' \Rightarrow M \text{ è s.s.}$$

(1)

Prop. Un A-mod. semisemplice M

$\Rightarrow$ ogni sequenza corta esatta:

$$0 \to N \to M \to N' \to 0$$

di A-moduli si spezza, i.e.

$$M \cong N \oplus N'.$$

Prop. I sottomoduli / quozienti / immagini sotto un morfismo di un A-mod semisemplice è semisemplice.

A anello, $\overbrace{\underbrace{A \oplus A \oplus \cdots \oplus A}_{n}}^{A^n}$ A-mod libero

$$\mathrm{End}_A A^n \cong M_n(A).$$

Prop: Sia A un anello, sia S un A-modulo semplice, per $n \in \mathbb{N}$, $U = \underbrace{S \oplus S \oplus \cdots \oplus S}_{n}$

allora $$\mathrm{End}_A U \cong M_n(D)$$

dove $D = \mathrm{End}_A S$ è un Corpo.

Dim: $$\sigma : \mathrm{End}_A U \longrightarrow M_n(\mathrm{End}_A S)$$
$$\varphi \longmapsto (\varphi_{ij})_{n \times n}, \quad \varphi_{ij} \in \mathrm{End}_A S$$

dove: $\forall\, 1 \le i, j \le n$

$$\varphi_{ij} : S \xrightarrow{\iota_j} \underbrace{S \oplus \cdots \oplus S}_{n} \xrightarrow{\varphi} S \oplus \cdots \oplus S \xrightarrow{p_i} S$$

$\forall s \in S \quad s \longmapsto (0, 0 \cdots \underset{j}{s} \, 0 \cdots 0) \quad (s_1, \cdots s_n) \longmapsto s_i$

φ_{ij}

ossia:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] & U \arrow[d, "p_i"] \\ S \arrow[u, "\iota_j"] \arrow[r, "\varphi_{ij}"] & S \end{tikzcd} \qquad \varphi_{ij} = p_i \varphi \iota_j$$

$$\boxed{\sum_{t=1}^{n} \iota_t p_t = id_U}$$

$\forall\ \varphi, \psi \in End_A U$

$$\sigma(\varphi+\psi) = \left((\varphi+\psi)_{ij}\right)_{n\times n} = \left(\varphi_{ij}+\psi_{ij}\right)_{n\times n}$$

$$= \left(\varphi_{ij}\right)_{n\times n} + \left(\psi_{ij}\right)_{n\times n}$$

$$= \sigma(\varphi) + \sigma(\psi)$$

$$\sigma(\varphi)\cdot\sigma(\psi) = \left(\varphi_{ij}\right)_{n\times n}\cdot\left(\psi_{ij}\right)_{n\times n} = \left(\sum_{t=1}^{n}\varphi_{it}\psi_{tj}\right)_{n\times n}$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{n}(p_i\varphi \underbrace{\iota_t)(p_t}\psi \iota_j)\right)_{n\times n}$$

$$= \left(p_i\varphi \underbrace{\sum_{t=1}^{n}\iota_t p_t}_{=1} \psi \iota_j\right)_{n\times n}$$

$$= \left(p_i\varphi\psi\iota_j\right)_{n\times n}$$

$$= \sigma(\varphi\cdot\psi).$$

$\Rightarrow \sigma$ è un morf. di anello

Data $(\varphi_{ij}) \in \mathrm{End}_A U$.

def: $\varphi : U \longrightarrow U$

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \| & & \\ S \oplus \cdots \oplus S & & \\ (s_1, \ldots s_n) & \longmapsto & \left((\varphi_{ij})_{n \times n} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \right)^{\text{trasp.}} \end{array}$$

$\varphi \in \mathrm{End}_A U$

def: $\tau : M_n(\mathrm{End}_A S) \to U$ $\Big\}$ ben. def.

$$(\varphi_{ij})_{n \times n} \longmapsto \varphi$$

$\sigma \cdot \tau = id$, $\tau \cdot \sigma = id$

$\Rightarrow \sigma$ è un isomorf.

$\boxed{///}$.