Spazi normati su $\mathbb{R}$

$L_{\mathbb{R}} \cup \{ \|-\| = \alpha : \alpha \in \mathbb{R} \}$

$\forall \varepsilon \exists \delta$

Linguaggio Spazi Vettoriali su $\mathbb{R}$

$L_{\mathbb{R}} = \{0, +, -\} \cup \mathbb{R}$

funzioni unarie

$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda(x) = \lambda x$

Vorremmo una TdM delle strutture della forma $\langle M, S \rangle$ con S fissato $(\mathbb{R})$

Struttura bipartita $\langle V, \mathbb{R} \rangle$

$\{0,+,-\}$ $\{0,1,+,-,\times,{}^{-1}\}$

- $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$(\alpha, v) \longmapsto \alpha v$

$\langle V, \mathbb{Q} \rangle \subseteq \langle V, \mathbb{R} \rangle \subseteq \langle V, \mathbb{C} \rangle$

Programma

* mettere condizioni su S

* restrizioni su $\mathcal{L}$

* trovare un $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ e dimostrare TdC solo per $T \subseteq \mathcal{J}$

esempio se ogni sottoinsieme finito di $T \subseteq \mathcal{J}$ è consistente allora T ha un modello della forma $\langle M, S \rangle$

struttura standard

S spazio Topologico di Hausdorff compatto

$\mathcal{L}_S$ predicati $x \in C$ con $C \subseteq S^n$ compatto

funzioni $f : S^n \longrightarrow S$ (uniformemente) continue

$\mathbb{R}$ compatto :)

$\mathcal{L}_H$ linguaggio home

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H \cup \mathcal{L}_S \cup$

$H^n_x S^m$ ① sotto condizione

$H^n_x S^m \longrightarrow S$ ② sotto condizione

$\cancel{H^n_x S^m \longrightarrow H}$ impossibili

Esempi norma le sorte $H \longrightarrow S$ -

metrica $H^2 \longrightarrow S$ -

$\langle G, S \rangle$ azione $H \times S \longrightarrow S$

$\tau_\varphi(x)$ per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}_H$

$M \models \forall x\, [\varphi(x) \longleftrightarrow \tau_\varphi(x)]$

---

① se τ ha sorta $H^n_x S^m$ e τ^M interpretazione voglio che per ogni $a \in M^n$

$\{ \alpha \in S^m : \langle a, \alpha \rangle \} \subseteq S^m$ compatto

② se f di sorta $H^n_x S^m \longrightarrow S$ e f^M interpretazione per ogni $a \in M^n$

$f(a, -) : S^m \longrightarrow S$ è equicontinua per ogni ε esiste δ per ogni $\alpha, \alpha' \in S^m$ per ogni $a \in M^m$

$$d(\alpha, \alpha') < \delta \implies d(f(a, \alpha), f(a, \alpha')) < \varepsilon$$

le funzioni $f^M(a, -)$ al variare di a hanno lo stesso modulo di continuità uniforme.

$H^n \times S^m \longrightarrow S$ se $n = 0$ se $m = 0$ $H^n \longrightarrow S$

---

formule atomiche di $\mathcal{L}$: ① $\tau_\varphi(x)$ $\varphi(x) \in \mathcal{L}_H$ ② $\tau(x, y)$ di sorte $H^n \times S^m$

③ $\tau(x, y) \in C$ τ m-tupla di termini di sorte $H^{|x|} \times S^{|y|}$

$C \subseteq S^m$ compatto

$\mathcal{F}^p$ ①, ②, ③ chiuso per $\wedge, \vee, \forall^H, \exists^H, \forall^S, \exists^S$ $\cancel{\neg}$ $\cancel{\rightarrow}$

FORMULE POSITIVE

$\mathcal{F}^c$ $\cancel{①}$, $\cancel{②}$, ③ chiuso per $\wedge, \vee, \forall^H, \exists^H, \forall^S, \exists^S$ $\cancel{\neg}$ $\cancel{\rightarrow}$

FORMULE CONTINUE

Esempio $M = \{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \|f\|_1 = \int_0^1 |f| \, dx < \infty \}$ $\mathcal{L}_H$ ....

$L_1 = M /_{= \text{a.e.}}$ $\|f - g\|_1 = 0$ $\|-\|_1 : H \longrightarrow S$

Spazi di Banach: EURISTICA a me interessa solo la palla unitaria

$\mathbb{R}$ non è compatto

Proposta ① M palla unitaria $2 \cdot v = u$ ← introduco come relazione ORRIBILE

Proposta ② $\langle \bar{M}, \bar{S} \rangle = \langle M_1, M_2, \ldots ; S_1, S_2 \ldots \rangle$ ORRIBILE

palla unitaria, palla di raggio 2, $[0,1]$, $[0,2]$ ....

Proposta ③ $S = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ compatto $\square$

Logica a valori reali

$\wedge, \vee, \forall, \exists$

$\langle M, S \rangle$ $\quad S = [0, 1]$

valori di verità

$f(x) = 0$

condizioni

f di sorta $H^n \to S$

formule atomiche

f di sorte $S^m \to S$

connetti proposizionali

nuova regola per costruire termini

$\sup_y \tau(x, y)$ $\quad \inf_y \tau(x, y)$

quantificatori

$\boxed{H \times S \to S}$