Def: Sia A un anello, sia $\{M_i\}_{i\in I}$ ins. di tutti i sottomoduli mass. di un A-mod. M, Radicale di M è

$$\mathrm{Rad}_A M = \bigcap_{\forall i\in I} M_i \,.$$

<u>Lemma</u> (Nakayama). Sia M un A-modulo sinistro (destro). Sia $x \in M$, sono equivalenti:

1) $x \in \mathrm{Rad}\, M$
2) Se N è un sottomod. di M tale che $Ax + N = M$, allora $N = M$.

2') (destro). . . . . tale che $xA + N = M \Rightarrow N = M$.

Dim: 1) ⇒ 2):

$$P = \left\{ N \underset{\text{sottomod}}{\subset} M \;\middle|\; \begin{array}{l} Ax + N = M \\ N \neq M \end{array} \right\}$$

Se $P \neq \emptyset$, P è parz. ord, induttivo.

$\overset{\text{Zorn}}{\Longrightarrow}$ P ha un mass. $N' \in P$.

N' è anche mass. in M perché:

Se $\exists\ N' \subsetneq N'' \subsetneq M$, N'' sottomod,

$x \in \operatorname{Rad} M$, $\Rightarrow x \in N''$ $\Rightarrow \begin{cases} Ax + N'' = M \\ N'' \neq M \end{cases}$

$\operatorname{Rad} M = \bigcap_{\forall N \subset M \text{ mass}} N$

$\Rightarrow N'' \in P$.

<u>Contrad.</u> con N' mass. in P.

$\operatorname{Rad} M \subseteq N'$

$\operatorname{Rad} M + N' = N' \neq M$

Se $Ax + N' = M \Rightarrow x \notin \operatorname{Rad} M$

$\Rightarrow P = \emptyset$.

2) $\Rightarrow$ 1). Se $x \notin \mathrm{Rad}\, M = \bigcap_{\substack{\forall N \subset M \\ \text{mass}}} N$

$\Rightarrow$ i.e. $\exists\, \underset{\text{mass}}{N \subset M}$.

t.c. $x \notin N \Rightarrow Ax + N = M$

$\Rightarrow$ 2) non vale. ✓.

2') $\Leftrightarrow$ 1) ✓.

<u>Prop</u>: Siano M e N due A-mod.

$\varphi: M \to N$ morfismo di A-mod.

suriettivo, allora.

$$\varphi(\mathrm{Rad}\, M) \subseteq \mathrm{Rad}\, N.$$

<u>Cor</u>: Sia M un A-mod. semisemplice

allora $\mathrm{Rad}\, M = \{0\}$.

Dim. $\operatorname{Rad} M \underset{\text{sottomod.}}{\subset} M$

M semplice $\Rightarrow \operatorname{Rad} M$ è un addendo di M.

$$M = \operatorname{Rad} M \oplus N$$

$$\xRightarrow[\text{2)}]{\text{Nakayama}} N = M. \Rightarrow \operatorname{Rad} M = \{0\} \quad \boxed{(i)}.$$

Cor: Sia M un A-mod, sia $N \underset{\text{sottomod}}{\subset} M$ t.c. M/N è semisemplice. allora $N \supseteq \operatorname{Rad} M$.

Def: Sia A un anello, radicale (di Jacobson) di A è

$J(A) := \operatorname{Rad} A$ dove A è come un A-mod. sinistro.

Prop: Dato un anello A,

$J(A) \lhd A$ "ideale bilatero"

Dim: $J(A)$ è ideale sinistro da def.

$* \quad End_A A = \{ \varphi_a : A \to A \mid \forall a \in A \} \cong A^o$
$\forall x \in A, \quad x \mapsto xa$

$\forall a \in A$,

$$J(A) \cdot a = \varphi_a(J(A)) \subseteq Rad_A A = J(A).$$

$\Rightarrow J(A)$ è anche ideale destro di A. $\boxed{//}$

Prop: $J(A) = Rad\, A_A$:= radicale di A come un A-mod destro.

Ossia:
$$J(A) = \bigcap_{\substack{\forall I_s \subset A \\ \text{ideale sinistro} \\ \text{mass.}}} I_s = \bigcap_{\substack{\forall I_d \subset A \\ \text{ideale dest.} \\ \text{mass.}}} I_d$$

Prop: Sia S un A-modulo semplice allora $J(A) \cdot S = \{0\}$.

Dim: S semplice A-mod, $S = Ax$.

$S \cong A / \mathrm{Ann}_A x$ isomorf. di A-mod.

S semplice $\Rightarrow$ $\mathrm{Ann}_A x$ è mass. sottomod in A.

$J(A) \subseteq \mathrm{Ann}_A x$

$J(A) S = J(A) \cdot A / \mathrm{Ann}_A x = \{\bar{0}\}$.

$\boxed{\text{LL}}$.

Cor: $$J(A) = \bigcap_{\substack{\forall S \text{ } A\text{-mod} \\ \text{semplice}}} \mathrm{Ann}_A S$$

$\boxed{\text{LL}}$

Lemma (Nakayama). Sia A un anello, M un A-mod, N un sottomod. di M.

1). $J(A) \cdot M \subseteq \operatorname{Rad} M$.

2). Se $J(A)M + N = M \Rightarrow N = M$

3). $\{1 + x \mid \forall x \in J(A)\} \subseteq A^* := \{$elem. di A invertibili risp. al "$\cdot$"$\}$

<u>Dim</u>: 1) Sia T un sottomod mass. di M.

M/T è semplice A-mod.

$$J(A) \cdot M/T = \{\bar{0}\} \Rightarrow J(A) \cdot M \subseteq T$$

$$\Rightarrow J(A)M \subseteq \bigcap_{\substack{\forall T \subset M \\ \text{mass}}} T = \operatorname{Rad} M.$$

2) "Nakayama Lemma 1" e 1)

3). Per $x \in J(A) \subseteq \mathrm{Rad}_A A$

$$-x + 1_A + x = 1_A$$

$$Ax + A(1_A + x) = A1_A = A.$$

$$\xRightarrow{\text{Nakayama 1}} A(1_A + x) = A.$$

$\exists\, y \in A,\ y(1_A + x) = 1_A$

Simile per A come A-mod. destro

$\Rightarrow \exists\, y' \in A,\ (1_A + x) y' = 1_A.$

$\Rightarrow (1_A + x) \in A^*$ $\boxed{\text{///}}$.

Cor: $J(A) = \{ x \in A \mid 1 - ax \in A^*,\ \forall a \in A \}$

$= \{ x \in A \mid 1 - axb \in A^*,\ \forall a, b \in A \}.$

$\boxed{\text{///}}$

es. Un anello A si chiama locale se $A/_{J(A)}$ è un corpo.

- A è locale $\Rightarrow$ $J(A)$ è l'unico ideale mass. bilatero di A.
- A è locale $\Longleftrightarrow$ $A = A^* \cup J(A)$.

eser: ① Un A-modulo M è indecomponibile se $End_A M$ è locale.

② Vale anche vice-versa?