ES. $A = \mathbb{Z}$, $J(A) = \{0\}$, $\mathbb{Z}$ Non s.-s.

Def.[1]: Un A-modulo M è **Artiniano** se per ogni catena discendente di ~~sotto~~moduli di M:

Condizione di catena discendente

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$$

dove M_i sottomod. di M, $\forall i \in \mathbb{N}$.

$\exists\, n \in \mathbb{N}$, t.c.

$$M_{n-1} \supset M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \cdots$$

Condiz. di minimo

Ossia: ogni ~~sotto~~ins. $\{M_i\}_{i \in I}$ di sottomod di M contiene un elemento minimo

Def.[2]: Un A-mod M è Noetheriano se per ogni catena ascendente:

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq \cdots$$

$\exists\, n \in \mathbb{N}$; $M_n = M_{n+1} = \cdots\cdots$

[ossia ogni ins. $\{M_i\}$ di sottomod. di M contiene un massimo.

e.g. uno spaz. vett. V/F, $\dim_F V < \infty$ è artiniano e noetheriano

e.g. $\mathbb{Z}$, $F[x]$. Noetheriano, Non artiniano.

Def: Un anello A è artiniano (noetheriano) se A come A-mod. è artiniano (noetheriano).

Prop: Sia A anello artiniano, allora $A/J(A)$ è anello semi-semplice.

(eser)

Def: Un anello A è <u>semiprimitivo</u> se esiste un A-modulo semisemplice <u>fedele</u>.

* Un A-mod. M è fedele se

$$\mathrm{Ann}_A M = \{0\}.$$

<u>Osser</u>: Semisemplice anelle $\Rightarrow$ semiprimitive.

Un anello A è <u>primitivo</u> se $\exists$ un A-mod M semplice t.c.

$$\mathrm{Ann}_A M = \{0\}$$

Prop: ogni anello semplice è primitivo.

<u>Dim</u>: Sia A anello semplice.

Sia Ax un A-mod ciclico

Ax contiene un ~~sottomod~~. mass. $M < Ax$.

Ax/M è un A-mod semplice.

$\mathrm{Ann}_A \, Ax/M \trianglelefteq A$ bilatero

A semplice. $\Rightarrow \mathrm{Ann}_A \, Ax/M = \{0\}$

Ax/M è A-mod. fedele.

Prop: Un anello A è semiprimitivo $\Longleftrightarrow J(A) = \{0\}$.

Dim: "$\Rightarrow$" se M un A-mod. s.s. fedele.

$J(A) \subseteq \mathrm{Ann}_A M = \{0\} \Rightarrow J(A) = \{0\}$

"$\Leftarrow$" $\{S_i\}_{i \in I}$ ins. di tutti i A-mod semplice.

$\bigoplus_{\forall i \in I} S_i$ è un A-mod. semisemplice.

$$\mathrm{Ann}_A \bigoplus_{\forall i\in I} S_i \subseteq \bigcap_{\forall i \in I} \mathrm{Ann}_A S_i = J(A) = \{0\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ann}_A \bigoplus_{\forall i\in I} S_i = \{0\}$$

$\Rightarrow A$ è semiprimitivo. $\boxed{//}$.

<u>Cor</u>! Per ogni anello A, si ha

$$A/J(A) \text{ è semiprimitivo.}$$

Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ ins. di anelli.

Un prodotto diretto di A_i, $\forall i \in I$, è un anello:

$$\prod_{\forall i\in I} A_i = \{(\ldots a_i \ldots)_I \mid a_i \in A_i, \forall i \in I\}.$$

con "+" e "·" canonico.

una somma diretta di A_i, $\forall i \in I$.

$$\bigoplus_{\forall i \in I} A_i = \left\{ (\cdots a_i \cdots)_I \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall a_i \in A_i, \forall i \in I \\ a_i = 0 \text{ per quasi tutti } i \in I \end{array} \right\}$$

è un A-modulo / Non un anello.

Def: Un sottoprodotto diretto di $\{A_i\}_{i \in I}$ è un anello A tale che, a meno isomorf.

$$\prod_{\forall i \in I} A_i \supseteq A \supseteq \bigoplus_{\forall i \in I} A_i$$

Prop: Un anello semiprimitivo è un sottoprodotto diretto di anelli primitivi.

Dim: $\{M_i\}_{i\in I}$ ins. di ideali sin. di A.

$$A \xrightarrow{\varphi} \prod_{\forall i\in I} A/M_i \quad \Big\} \text{ morf. di anello}$$

$$x \longmapsto (\bar{x}, \bar{x} \dots \bar{x} \dots)$$

$$\ker\varphi = \bigcap_{\forall i\in I} M_i = J(A) = \{0\}$$

A semiprimitivo.

$\mathrm{Im}\,\varphi$ è un sottoprodott di anelli primitivi. $\square$

Sia D un corpo, sia V un D-modulo (spaz. vett. $/D$)

Un sottoins. $A \subseteq \mathrm{End}_D V$ è "denso" se per ogni ins. finito $\forall n\in\mathbb{N}$, $\{v_1, \dots v_n\}$ e $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V$,

$\exists\, a \in A$, t.c.

$$a v_i = u_i, \quad \forall i = 1, \dots n.$$

* Se $\dim_D V < \infty$, $A \underset{\text{denso}}{\subseteq} \mathrm{End}_D V$

$\Longleftrightarrow A = \mathrm{End}_D V$.

<u>Teo</u> (Jacobson). Sia A un anello primitivo, allora A è isomorfo a un sottoanello denso di $\mathrm{End}_D V$ dove V è un D-modulo, D è un corpo.

<u>Dim</u>: N. Jacobso, Basic Alg. Vol II. Capt. 4. §1 – §3. $\boxed{/\!/}$

eser: Sono equivalenti:

1): A è un anello semisemplice.

2). A è .... semiprimitivo e artiniano.

3). A è .... e noetheriano.

---

primitività $\xrightarrow{\text{denso}} \mathrm{End}_D V$

sottoprod. dirett. $\nearrow$ $\uparrow$ $\cong$

semplicità $M_{I,r\text{-fin}}(D)$

Anelli $\xrightarrow{J(A)}$ Semiprimitività $\uparrow$

artin. $\searrow$ Noether. $\nearrow$ artin

Semisemplici $\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$

$$M_{I,r\text{-fin}}(D) = \left\{ (d_{ij})_{I\times I} \;\middle|\; \begin{array}{l} d_{ij} \in D \\ d_{ij} = 0 \text{ per quasi} \\ \quad \text{tutti } i \in I \end{array} \right\}$$