Def: Sia V uno spaz. vett $/F$.

Una forma quadratica Q su V è una funzione:

$$Q : V \longrightarrow F \quad \text{t.c.}$$

$\forall v \in V$, $\forall a \in F$,

1) $Q(av) = a^2 Q(v)$.

2) la funz. $B_Q : V \times V \to F$

$\forall u, v \in V$, $(u,v) \mapsto Q(u+v) - Q(u) - Q(v)$

è un forma bilineare simm.

e.g. Sia $B \in \mathcal{B}(V)_s$, char $F \neq 2$

def: $Q_B : V \to F$

$\forall v \in V$, $v \mapsto \frac{1}{2} B(v,v)$.

è una forma quadratica.

e.g. $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j \in F[x_1, \dots, x_n]$

polin. omogeneo di gd. 2.

Sia V spaz. vett. $/F$, $\{v_i\}_{i=1}^n$ base di V.

$$\left.\begin{array}{l} Q_f : V \to F \\ V \ni v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \mapsto \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} a_i a_j \end{array}\right\} \text{una forma quadratica}$$

Prop: Sia V uno spazio vett. $/F$. $\dim_F V = n$. Esistono corrisp. 1-1 tra i seguenti:

1) {forme bilin. simm. su V}.

2) {forme quadratiche su V}.

3) {funzioni polin. omogenei di gd 2 con # n variabili a coeff. in F}

4) $M_n(F)_s$

Dim: 1) $\Leftrightarrow$ 4). ✓

1) $\Leftrightarrow$ 2) ✓

3) $\Leftrightarrow$ 2) ✓

2) $\Leftrightarrow$ 4) ✓ $\boxed{\text{c.v.d.}}$.

Prop: Sia B una forma bilin. su V, Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots w_n\}$ due basi di V. Allora $\exists$

$$D \in GL_n(F) = \{n \times n \text{ matrici invertibili a coeff. in } F\}$$

tale che

$$\left(B(v_i, v_j)\right)_{n\times n} = D \cdot \left(B(w_i, w_j)\right)_{n\times n} \cdot D^t$$

Dim: $\forall i = 1, \dots, n$,

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} v_j \quad , d_{ij} \in F.$$

$$B(w_i, w_j) = (d_{i1}\ d_{i2} \cdots d_{in}) \Big(B(v_i, v_j) \Big)_{n\times n} \cdot \begin{pmatrix} d_{j1} \\ d_{j2} \\ \vdots \\ d_{jn} \end{pmatrix}$$

$$D = (d_{ij})_{n\times n}$$

$$\Rightarrow \Big(B(w_i, w_j) \Big) = D \Big(B(v_i, v_j) \Big)_{n\times n} D^t .$$

114

Def: Due matrici $X, Y \in M_n(F)$ sono $\boxed{\text{Cogrediente}}$ Congruente se $\exists\ D \in GL_n(F)$ t.c.

$$X = D Y D^t .$$

Osser: "Congruenza" è una relaz. di equivalenza.

Def.: Due forme bilin. B e B' su V sono isomorfi (equivalente) se $\exists$ un isomorfismo $\sigma \in \mathrm{End}_F V$ tale che $\forall u, v \in V$,

$$B(\sigma(u), \sigma(v)) = B'(u, v).$$

Ossia:

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{B} & F \\ {\scriptstyle \sigma\times\sigma}\downarrow\uparrow & & \parallel \\ V \times V & \xrightarrow{B'} & F \end{array}$$

si comm.

Prop.: Due forme bilin. B e B' su V sono isomorfi $\iff$ le matrici di B e B' risp. a una base di V sono congruente.

Dim. eser

Prop: Esistono corrisp. 1-1:

{classi equivalenti di forme bilin. su V}

$\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ {classi $\boxed{\text{equiv}}$ di matrici in $M_n(F)$}

congruenti

{classi equiv. di forme bilin. simm. su V}

$\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ {classi congruenti di matrici in $M_n(F)_s$}

{classi equiv. di form. bilin. antisimm. su V}

$\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ {class. congruenti di matrici in $M_n(F)_a$}

Dim. eser

Prop. Sia $X \in M_n(F)_s$, allora $\exists D \in GL_n(F)$

t.c.

$$DXD^t = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & a_2 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_r & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} r = \text{rango} \\ a_i \neq 0 \\ \forall i = 1, \dots, r. \end{array}$$

Dim: $X = (x_{ij})_{n \times n}$, $x_{ij} \in F$.

l'induz. su n:

$n > 1$: ①: $x_{11} \neq 0$.

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ -x_{11}^{-1}x_{12} & 1 & & & \\ -x_{11}^{-1}x_{13} & & 1 & & \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ -x_{11}^{-1}x_{1n} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 X D_1^t = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & X' & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \quad X' \in M_{n-1}(F).$$

Per l'ipotesi dell'induz: $\exists\, D' \in GL_{n-1}(F)$.

t.c. $D' X' D'^t = \begin{pmatrix} a_2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n-1 \times n-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} D_1$$

$$\Rightarrow \quad D X D^t = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

② $x_{11} = 0$

i). Se $x_{1i} = 0$, $\forall i = 2, \dots, n$.

i.e. $X = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & & X' \\ 0 & & \end{pmatrix}$

Si applica l'ipotesi dell'induz.

$\Rightarrow \exists D$. t.c. $DXD = \begin{pmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & * & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$.

ii). se $\exists\, i \in \{2, \dots, n\}$, $x_{1i} \neq 0$

Sia $x \in F^* \setminus \{-\frac{x_{1i}^{-1} x_{ii}}{2}\}$

$$D = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & 0 & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & & 0 & \ddots & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \\ i \end{array} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$DXD^t = \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots \\ x'_{21} & \ddots & \\ \vdots & & x'_{nn} \end{pmatrix}$$

dove

$$x'_{11} = 2x x_{1i} + x_{ii} \neq 0$$

si torna al punto ①.

$\Rightarrow X \overset{\text{congruente}}{\sim} \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{r} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{M}}$.

Prop: $\mathrm{Char}\, F \neq 2$. Sia $X \in M_n(F)_a$ allora $\exists\, \sigma \in GL_n(F)$ t.c.

$$DXD^t = \begin{pmatrix} W & & & & & \\ & W & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & W & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

dove $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dim. $\square$

Def: Una forma bilin. simm. o antisimm. B su V è non-degenere se la matrice di B è invertibile.

$$V^\perp = \{ v \in V \mid B(u,v) = 0,\ \forall u \in V \}.$$

Prop: Sia $B \in \mathcal{B}(V)_s$ opp. $\mathcal{B}(V)_a$ allora $\exists$ un $U \subseteq V$ t.c.

$$V = U \oplus V^\perp.$$

dove $B|_U$ è non-degenere.

e $B|_{V^\perp} = 0$

<u>Dim</u>: Si usa la forma di matrici di B. $\boxtimes$

e.g.: V spaz. vett. $/\mathbb{C}$, B forma bilin. simm. non-deg. su V.

$\Rightarrow \exists \{v_i\}_{i=1}^n$ base di V t.c. risp. a quelle

$$B \overset{\text{matr.le}}{\sim} \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{a_n}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B \overset{\text{congruenza}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists!$ forma bilin. simm. non-deg. su V a meno isomorf.

e.g.: $V = \mathbb{R}^3$, B una forma bilin simm. non-deg. su V.

$\Rightarrow \exists$ una base risp. alla quale

$$B \sim \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & a_3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|a_1|}} & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{|a_2|}} & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{|a_3|}} \end{pmatrix}$$

$$B \sim D \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} D^t$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \varepsilon_2 & \\ 0 & & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

$$\Rightarrow B \sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Prop: Sia B una forma bin. simm. non-deg su $\mathbb{R}^n$, allora

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \\ \}n-r \end{matrix}$$