Rappresentazioni dei gruppi.

Riferimenti.

1). J. Serra: Linear representions of finite groups.

GTM 42

- GTM. 42.

2) · E. B. Vinberg:

Linear representations of groups.

3): W. Fulton, J. Harris.

Representation Theory, GTM 129

4). J. Alperin, R. Bell.

Groups and representations.

GTM · 162

$*$ X insieme, G un gruppo.

Un'azione di G su X è

$$\begin{aligned} G \times X &\xrightarrow{*} X \\ (g, x) &\longmapsto g*x \end{aligned} \quad \Big\} \quad \begin{array}{l} \forall g, h \in G \\ \forall x \in X, \\ (g \cdot h) * x = g*(h*x) \\ 1_G * x = x . \end{array}$$

Def. Sia V uno spazio vettoriale a coeff. in F, sia G un gruppo.

Un'azione lineare di G su V è una funzione

$$G \times V \xrightarrow{*} V$$

t.c. $\forall g, h \in G$, $\forall u, v \in V$, $\forall a \in F$.

$$g*(u+v) = g*u + g*v .$$

$$g*(av) = a \cdot g*v ; \quad (gh)*v = g*(h*x) .$$

$$1_G * v = v .$$

e.g.: Siano $K \supseteq k$ un'estensione di campo, sia K Galoisiano su k

$Gal(K/k)$ agisce su spaz. vett. K a coeff. in k, linearmente

e.g. - X uno spazio topologico.

$C(X) = \{$funzioni continue $X \to \mathbb{R}\}$.

"+" in $C(X)$: $\forall f, g \in C(X)$, $\forall x \in X$.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

coeff "$\cdot$": $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall f \in C(X)$, $\forall x \in X$.

$(a \cdot f)(x) = a \cdot (f(x))$

$\Rightarrow C(X)$ è uno spaz. vett. $/\mathbb{R}$.

Sia G un gruppo topologico che agisce su X in modo continuo.

def: un'azione di G su $C(X)$:

$$G \times C(X) \xrightarrow{*} C(X).$$

$\forall h \in G,$ $f \in C(X)$ $\quad (h, f) \longmapsto h*f :$

$$X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in X, \; x \longmapsto h*f(x) := f(h^{-1}x)$$

"$*$" è un'azione:

$\forall h, h' \in G,$ $(h \cdot h')*f(x) = f((h \cdot h')^{-1} \cdot x)$

$$= f(h'^{-1} \cdot h^{-1} x)$$

$$= [h' * f](h^{-1}x).$$

$$= h*(h'*f(x)).$$

"$*$" è lineare.

$\Rightarrow$ G agisce lineramente su $C(X)$.

Qest. Determinare tutte le azioni di un gruppo su uno spaz. vett. ?

---

* $\exists$ Corrispond. 1-1.

$\{$azioni di G su $X\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} Hom(G, S_X)$

dove S_X è il gruppo di permutationi su X.

Prop: $\exists$ Corrispondenza 1-1 tra.

$\{$azioni lineari di un gruppo G su uno spaz. vett. $V\}$

$\longleftrightarrow Hom(G, GL(V))$, dove

$GL(V)$ è il gruppo di trasformaz. lin. invertibile su V.

Def: Sia G un gruppo e V uno spazio vettoria su F. Una rappresentazione (lineare) G su V è un omomorfimo $G \longrightarrow GL(V)$ di gruppo.

Quest: Determinare tutte le rapp. di G su uno spaz. vett.

e.g. $G = \langle g \rangle$ gruppo ciclico, $|G| = m$

Sia $\rho : G \to GL(V)$ una rapp.

Suppongo: $\dim V = 1$. Sia $V/\mathbb{C}$:
$V = \mathbb{C}$

$g^m = 1$, $GL(V) = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\rho(g)^m = 1 \Rightarrow \rho(g) \in \{m\text{-sime rad. di } 1\}$.

$\{$ le rapp. di G su $V\}$

$$= \left\{ \rho_w : \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ g \longmapsto w \end{array} \;\middle|\; w \in \{m\text{-sime rad. di } 1\} \right\}$$

__eser__: Determinare tutte le rapp. di $G = \langle g \rangle$ con $|G| = m$ su $\mathbb{C}^n$

$*$: forma di Jordan di g è

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

(TH)

e.g.: se $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ & \alpha \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ & \alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^m \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e.g. Determinare tutte le azioni lineari differenziabili del gruppo $(\mathbb{R},+)$ su spazio $\mathbb{R}^n$. Ossia, determinare tutti gli omomorfismi differenziabili tra $(\mathbb{R},+)$ e $GL_n(\mathbb{R})$:

Sia $f: (\mathbb{R},+) \xrightarrow[\text{omomorf. di gp}]{\text{diff.}} GL_n(\mathbb{R})$ $= \left\{ \begin{array}{l} n\times n \text{ Matrici} \\ \text{invert. su } \mathbb{R} \end{array} \right\}$.

$\forall\, t, x \in \mathbb{R}, \quad f(t+x) = f(t)\cdot f(x)$

differenziare f su x a posto $\cancel{t}=0$:

$$f'(t) = f(t) f'(0).$$

risolu. equiva. a condiz. iniz.

$f(0) = I_n$ matrice d'identità

$$\Rightarrow \quad f(t) = \exp.(tT) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tT)^n}{n!}$$

dove $T = f'(0)$.