

Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Foglio di esercizi n. 9 – a.a. 2023-24

Da consegnare lunedì 11 dicembre

Esercizio 1. Per ognuna delle seguenti sequenze, determinare il tipo di omeomorfismo della superficie corrispondente. Per la seconda e l'ultima sequenza, applicare esplicitamente l'algoritmo del taglia & incolla per classificare la superficie.

1. $abcacb$
2. $abcb^{-1}dec^{-1}aed$
3. $abcc^{-1}def f^{-1}e^{-1}d^{-1}b^{-1}a^{-1}$
4. $aed^{-1}e^{-1}bcadcb$
5. $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$
6. $abcd a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$

Esercizio 2. Il libro XIII degli *Elementi* di Euclide (l'ultimo libro dell'opera) è dedicato alla costruzione dei 5 solidi platonici: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro e alla dimostrazione del fatto che sono gli unici poliedri regolari (cioè tutte le facce sono poligoni regolari uguali fra loro, da ogni vertice parte lo stesso numero di spigoli e gli angoli solidi sono tutti uguali fra loro).

Dimostrare, usando il fatto che un poliedro regolare è una suddivisione della sfera e la caratteristica di Eulero, che queste sono le uniche 5 possibilità.

Notare che questa dimostrazione non dà l'*esistenza*. Costruire il tetraedro, il cubo e l'ottaedro è semplice, ma costruire il dodecaedro e l'icosaedro è meno immediato (ma non è richiesto per quest'esercizio).

Esercizio 3. Per ogni *triangolazione* (cioè tutte le facce sono *triangoli*) di una superficie compatta connessa X con f facce, s spigoli e v vertici, dimostrare che

$$\begin{aligned}3f &= 2s \\s &= 3(v - \chi) \\v &\geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2}\end{aligned}$$

dove χ è la caratteristica di Eulero di X : $\chi = f - s + v$. Suggerimento per l'ultima disuguaglianza: osservare che il numero s di spigoli è minore o uguale al numero delle coppie di vertici.

Esercizio 4. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, con coordinate omogenee $(x : y : z)$, consideriamo i punti $A = (1 : 3 : 0)$ e $B = (2 : -1 : 5)$. Determinare l'equazione della retta passante per i punti A e B .

Esercizio 5. Consideriamo il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e i punti dati, in un sistema di riferimento proiettivo, dalle coordinate omogenee $A = [1 : 0 : 0]$, $B := [1 : 2 : 1]$, $C := [1 : -1 : -1]$ e $D := [1 : 1 : 0]$. Dimostrare che i punti dati sono in posizione generale o spiegare perché non lo sono.