Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 9 - 5 Dicembre 2023

Esercizio 1. Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza:

$$W = a\, d^{-1}\, b^{-1}\, c^{-1}\, d^{-1}\, b\, a\, c$$

1. Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.
2. Determinare una superficie compatta e orientabile T tale che $\chi(S\sharp T) = -4$, oppure dimostrare che una tale superficie non esiste.

Esercizio 2. Sia S una superficie compatta orientabile con caratteristica di Eulero $\chi(S) = -6$. Determinare tutti i modi possibili (a meno di omeomorfismo) di scrivere S come somma connessa di altre superfici, nessuna delle quali sia omeomorfa ad una sfera.

Esercizio 3. Tutte le superfici in questo esercizio sono superfici topologiche connesse e compatte. Per ognuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa giustificando la risposta (dare una dimostrazione o trovare un controesempio).

1. Se $\chi(S_1) = \chi(S_2) = -18$, allora S_1 e S_2 sono omeomorfe.
2. Se S_1, S_2, S_3 e S_4 sono superfici a due a due non omeomorfe, allora $S_1\sharp S_2$ non è omemorfa a $S_3\sharp S_4$
3. Esiste una superficie S che ha una suddivisione con 8 vertici, 10 spigoli e 6 facce.

Esercizio 4. Si considerino in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ i punti

$$P_1 = [1, 0, 1, 2], \quad P_2 = [0, 1, 1, 1], \quad P_3 = [2, 1, 2, 2], \quad P_4 = [1, 1, 2, 3].$$

1. Si dica se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.
2. Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da P_1, P_2, P_3, P_4 e se ne determinino equazioni cartesiane.
3. Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Esercizio 5. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ si considerino i punti

$$P_1 = [1 : 1 : 0 : 0], \quad P_2 = [-1 : 0 : 0 : 1], \quad P_3 = [0 : 0 : 2 : 0]$$

$$Q_1 = [0 : t : 2 : 1], \quad Q_2 = [t : 1 : 2 : 0], \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Calcolare le dimensioni del sottospazio π generato dai punti P_1, P_2, P_3 e del sottospazio r generato dai punti Q_1, Q_2, al variare di t.
2. Determinare, al variare di t, la posizione reciproca di π e r.

Esercizio 6. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, con coordinate omogenee $(x : y : z : w)$, si considerino i punti

$$P_1 = (1 : 0 : -1 : 0), \quad P_2 = (0 : 2 : 0 : 0), \quad P_3 = (1 : -1 : 0 : 1)$$

$$S = (1 : 0 : 1 : 2), \quad Q_t = (1 : 1 : 0 : t)$$

dove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1. Scrivere l'equazione (o le equazioni) cartesiane dello sottospazio $W \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ generato dai punti P_1, P_2, P_3 e dire che dimensione ha. Determinare inoltre, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la dimensione del sottospazio $R_t \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ generato dai due punti S e Q_t.
2. Discutere al variare di $t \in \mathbb{R}$ la posizione reciproca di W e R_t.
3. Verificare che i punti $A = (3 : 2 : 1 : 2)$ e $B = (0 : 1 : -1 : -2)$ appartengono al sottospazio R_0 (generato da S e Q_0).