Sia G un gruppo. Siano

$\rho: G \longrightarrow GL(V)$, V sp. vett $/F$

$\rho': G \longrightarrow GL(W)$, W ..... $/F$.

Se $\exists\ \sigma: V \to W$ trasf. lin. t.c.

$\forall g \in G$,
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(g)"] \arrow[d, "\sigma"'] & V \arrow[d, "\sigma"] \\ W \arrow[r, "\rho'(g)"] & W \end{tikzcd}$$
diagramma commuta.

Se σ è un isomorfismo, si dice che ρ e ρ' sono <u>equivalenti</u>.

<u>Quest.</u> Trovare tutte le rapp. di un gruppo G su uno spaz. vett. a coeff. in F, a meno equivalenza.

Def. Sia $\rho : G \to GL(V)$, V/F

Se $\exists$ un sottospaz. $W \subseteq V$ tale che

$\forall g \in G$,

$$\rho(g) W \subseteq W.$$

$$\left.\begin{array}{l} \rho|_W : G \longrightarrow GL(W) \\ \forall g \in G,\ g \longmapsto \rho(g)|_W . \end{array}\right\} \text{si chiama una sottorapp. di } \rho.$$

e.g. $S_3 \xrightarrow{\rho} GL(\mathbb{R}^3)$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$

$\forall \sigma \in S_3$, $\sigma \longmapsto \rho(\sigma) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i v_i \mapsto \sum_{i=1}^{3} a_i v_{\sigma(i)}, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

ρ è una rapp. di S_3

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i v_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{3} a_i = 0 \right\} \underset{\text{sottospaz.}}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2$$

$\forall \sigma \in S_3$, $\rho(\sigma) V = V$

$\Rightarrow \rho|_V$ è una sottorapp. di ρ.

Def: Una rapp. $\rho : G \to GL(V)$

è <u>irriducibile</u> se non ha alc.

sottorapp. non-banale

* ~~Data~~ $\rho : G \to GL(V)$, $\Rightarrow$ $\dim_F V$ è

<u>grado della rapp.</u>

e.g. Sia G gruppo abeliano finito.

Sia $\rho : G \to GL(V)$ rapp. <u>irr</u>.

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} V = ?$

* $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$, $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$

se $\forall i,j$, $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, allora.

$\exists$ un autovettore comune di tutte σ_i

$\forall i = 1, \dots n$.

-: l'induz. su n.

$n = 1$ ✓.

$n > 1$, σ_n ha un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$

$V_\lambda = \{v \in V \mid v \in V, \sigma_n(v) = \lambda v\}$,

$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, $\forall i = 1 \dots n$

$\Rightarrow \quad \sigma_i \cdot V_\lambda \subseteq V_\lambda$, $\forall i$

Per l'ipotesi. V_λ contiene un autovettore comune per $\forall \sigma_i$, che è autovett. com. per $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

$\rho(G) = \{ \rho(g) \mid \forall g \in G \}$ ins. di trasf. lin. commutativi

$\Rightarrow \exists$ un autovettore comune. $v \in V$

$\rho(G) \cdot \mathbb{C}v = \mathbb{C}v$

ρ irr. $\Rightarrow V = \mathbb{C}v \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} V = 1$.

prop: tutte le rapp. irr. di un gruppo abeliano finito su $\mathbb{C}$ è sempre di grado 1.

Def: Sia G un gp. Siano

$$\left.\begin{array}{l}\rho : G \to GL(V) \\ \rho' : G \to GL(W)\end{array}\right\}, \text{ due rapp. di } G \quad V/_F,\ W/_F,$$

Una Somma diretta di ρ e ρ' è una rapp.:

$$\rho \oplus \rho' : G \longrightarrow GL(V \oplus W)$$

$\forall g \in G$, $\quad g \mapsto \rho \oplus \rho'(g)$ dove

$$\forall v \in V,\ \forall w \in W, \quad \rho \oplus \rho'(g)\underbrace{(v, w)}_{\in\, V \oplus W} \stackrel{\text{def}}{=} (\rho(g)v, \rho'(g)w)$$

Def: Una rapp. $\rho : G \to GL(V)$ è <u>Completamente riducibile</u> se ρ è una somma diretta delle sottorapprentazioni irriducibili.

e.g.: $G = \langle g \rangle$, $|G| = m$.

$$\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$$
$$g \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \alpha_i^m = 1.$$

$1 \leq i \leq n$, $\rho_i : G \to GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$
$g \mapsto \alpha_i$
$\Big\}$ rapp. irr di G.

$$\Rightarrow \rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n,$$

e.g. V spaz. vett. in $\mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$

$f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilin. simm. definitivamente positiva.

Sia $U \subseteq V$ sottospa. $\Rightarrow V = U \oplus U^{\perp}$

Sia $\rho : G \to GL(V)$ una rapp.,

ρ si dice ortogonale se

$$f(\rho(g)u, \rho(g)v) = f(u, v)$$

$\forall g \in G, \ \forall u, v \in V.$

*: Sia B una forma bilin. su V
τ trasf. lin. su V. $\forall u, v \in V$
$\Rightarrow \ \tau_* B(u, v) := B(\tau(u), \tau(v))$.
$\tau_* B$ è una forma bilin su V.

i.e. $\rho(g)_* f = f$

ossia: ρ è ortogonale $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$\forall g \in G, \ \rho_* f = f$.

Prop. Sia G un gp. ogni rapp. ortogonale di G è completamente riducibile.

Dim: $\rho : G \longrightarrow GL(V)$, $\dim_F V$.

Sia $U \subset V$ ~~sottosp.~~ $V = U \oplus U^{\perp}$.

Se $\rho(G)U \subseteq U \Rightarrow \rho(G)U^{\perp} \subseteq U^{\perp}$.

perché ρ è ortogonale

$$\Rightarrow \rho = \rho|_U \oplus \rho|_{U^{\perp}}$$

Si usa l'induz. su $\dim_F V$:

se ρ è irr. ✓

" ... non è irr: $\exists\, U \subsetneq V$. e $\rho|_U$ è una ~~sottorapp.~~ di $\rho \Rightarrow \rho = \rho|_U \oplus \rho|_{U^{\perp}}$

Per l'ipotesi dell'induz.

$\Rightarrow \rho|_U$ e $\rho|_{U^{\perp}}$ sono Completamente riducibile. $\Rightarrow \rho$ è Compl. riducibile.

e.g. G ~~una~~ gp finito.

$V/\mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$.

$f_0(-,-)$ prod. scalare ~~di~~ V.

Sia $\rho : G \to GL(V)$ una

rapp.

$\forall g \in G$, $\underbrace{\rho(g)_* f_0}$ $(u,v) = f_0(\rho(g)u, \rho(g)v)$.

$\Rightarrow \rho(g)_* f_0$ form. bilin. simm.
def. positiva

$u, v \in V$, $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(u,v) := \sum_{\forall g \in G} \rho(g)_* f_0(u,v)$$

$\Rightarrow f$ è una forma. bilin simm.
definitiv. positivo

$\rho(g)_* f = f \Rightarrow \rho$ è ortogonale
risp. f.

$\Rightarrow \rho$ è compl. riducibile.