Def. Un gruppo G è topologico se G è uno spaz. top. tale che l'operaz. di gp:

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$\forall g, h \in G, \quad (g,h) \longmapsto g \cdot h^{-1}$$

è continua.

e.g.: $(\mathbb{R}, +)$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(M_n(\mathbb{R}), +)$, $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$

Sia V uno spaz. vett. $/ F$.

" B una forma bilin. simm. oppure antisimm. non-deg.

Una $T \in GL(V)$ è una isometria risp. a B se

$\forall u, v \in V,$

$$\mathcal{B}(\tau(u), \tau(v)) = \mathcal{B}(u, v).$$

se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V,

T = matrice di τ risp. a $\{v_1, \dots, v_n\}$

$$\left(B(v_i, v_j) \right)_{n \times n} = \left(\mathcal{B}(\tau(v_i), \tau(v_j)) \right)_{n \times n}$$

$$= T \cdot \left(B(v_i, v_j) \right) T^t$$

$G = \{$ isometrie di V risp. a $\mathcal{B}\}$

$$\underset{\{v_1, \dots, v_n\}}{\approx} \left\{ T \in GL_n(F) \mid T \left(B(v_i, v_j) \right) \cdot T^t = \left(B(v_i, v_j) \right) \right\}$$

e.g. $V = \mathbb{R}^n$:

$\mathcal{B}$ = il prod. scalare dei vett. in V

$\Rightarrow \exists$ una base di V; risp. alla qualle.

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

$$\{\text{Isometr. risp. } B\} = \{T \in GL_n(\mathbb{R}) \mid T \cdot T^t = I_n\}$$

$$= O_n(\mathbb{R})$$

Se $B' \overset{\text{matrice}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$

$$\{\text{isometri. risp. a } B'\} = \{T \in GL_n(\mathbb{R}) \mid$$

$$T \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} T^t = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \}.$$

? Se $B'' \sim \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$, $I_m = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{m \times m}.$

? Se $B_a \sim \begin{pmatrix} W & & & 0 \\ & W & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & W \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$$

$$Sp_n(\mathbb{R}) = \{\text{isometr. risp. } B_a\}$$
$$= \left\{ T \in Gl_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; T \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} T^t = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Def. Un gruppo topologico G è compatto se è un spaz. top. compatto.

e.g. $O_n(\mathbb{R})$, $Sp_n(\mathbb{R})$.

$SO_n(\mathbb{R}) = \{T \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det T = 1\}$.

***Prop**: Sia G un gruppo compatto, allora $\exists$ una misura (Haar) μ su G t.c. 1): se $f : G \to \mathbb{R}$ continua e $f(g) \geq 0$ $\forall g \in G$

$$\Rightarrow \int_G f(g)\,\mu(dg) > 0.$$

2) $\forall h \in G$,

$$\int_G f(h\cdot g)\,\mu dg = \int_G f(g)\,\mu dg.$$

Sia G un gp. compatto:

Sia $\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ una rapp.

$f_0(-,-)$ prod. scalare su $\mathbb{R}^n$

Def. una forma bilin. simm. ~~de~~. f su V.

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$f(u,v) := \int_G f_0(\rho(g)u, \rho(g)v)\,\mu(dg).$$

$\Rightarrow f$ è definita positiva.

$\forall h \in G$, $\rho(h)_* f(u,v)$

$$= \int_G f_0(\rho(h)\rho(g)u, \rho(h)\rho(g)v)\,\mu(dg).$$

$$= \int_G f_0(\rho(g)u, \rho(g)v)\, \mu(dg)$$

$$= f(u,v).$$

i.e. $\forall h \in G$, $\rho(h)_* f = f$.

$\Rightarrow$ ρ è una rapp. ortogonale.

$\Rightarrow$ ρ è complet. riducibile.

Prop.: Ogni rappresentazione reale di un gruppo compatto è complet. riducibile.

Sia G un gruppo, F un campo.

$$F[G] := \{ f : G \to F \mid f(g) = 0 \text{ per quasi tutti } g \in G \}$$

"+" "coeff.": $\forall a \in F$, $\forall f \in [G]$, $\forall g \in G$, $(a \cdot f)(g) := a \cdot f(g)$

$\Rightarrow F[G]$ è uno spaz. vett. $/F$

$\forall g \in G, \quad \delta_g : G \longrightarrow F \quad \in F[G]$

$\forall h \in G, \quad h \mapsto \delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{se } g = h \\ 0 & \text{''} \ g \neq h \end{cases}$

$$\forall f \in F[G] \Rightarrow f(h) = \sum_{\forall g \in G}^{<\infty} f(g)\delta_g$$

$\forall h \in G$

$\{\delta_g \mid \forall g \in G\}$ ins. di generatori di $F[G]$

<u>lin. indipend.</u> di $\{\delta_g \mid \forall g \in G\}$:

se per $\left.\begin{array}{l} g_1, \dots, g_n \in G \\ a_1, \dots, a_n \in F \end{array}\right\} \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{g_i} = 0$

$\Rightarrow \forall h \in G, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{g_i}(h) = 0$

$\xRightarrow{h = g_1, \dots, g_n} a_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$

Di conseg. $\{\delta_g \mid g \in G\}$ è una base di $F[G]$.

Def. un prod. "$\cdot$" in $F[G]$.

$\forall\, h, g \in F[G]$,

$$\delta_h \cdot \delta_g := \delta_{h \cdot g}.$$

Per $f_1, f_2 \in F[G]$.

$$f_1 = \sum_{\forall g \in G}^{<\infty} a_g \delta_g \qquad f_2 = \sum_{\forall h \in G}^{<\infty} b_h \delta_h$$

$$f \cdot g = \sum a_g \delta_g \cdot \sum a_h \delta_h \overset{def}{=} \sum_{g,h \in G}^{<\infty} a_g \cdot a_h \, \delta_g \cdot \delta_h$$

$$= \sum_{g,h \in G}^{<\infty} a_g a_h \, \delta_{g \cdot h} \quad \in F[G].$$

" prod. <u>Convoluzione</u> "

$\Rightarrow$ $F[G]$ è un anello. risp. $(+, \cdot)$.

Def: F un Campo, Un anello A è una F-algebra se A è uno spaz. vett. su F t.c.

$\forall a \in F, \ \forall x, y \in A,$

$$a \cdot (x \cdot y) = ax \cdot y = x \cdot ay.$$

e.g. $F[G]$ è un F-alg.

$$F \cong F \cdot 1_{F[G]} \subseteq F[G].$$

Si sostituisce δ_g con g in $F[G]$.

$$\Rightarrow \sum_{g \in G}^{<\infty} a_g \delta_g =: \sum_{\forall g \in G}^{<\infty} a_g g.$$

$$F[G] = \left\{ \sum_{g \in G}^{<\infty} a_g g \;\middle|\; a_g \in F, \right\}$$

e.g. $G = \langle g \rangle$,

Se $|G| = \infty$, $F[G] = \left\{ \sum_{i=-n}^{n} a_i g^i \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in F \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$

$$\cong F[x^{-1}, x]$$

Se $|G| = n$ $F[G] = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i g^i \;\middle|\; a_i \in F \right\}.$

$$\cong F[x] / (x^n - 1)$$ $\boxed{//}$